1 Introduction

Une équation algébrique est une équation mettant en jeu une inconnue x qui n'intervient que par ses puissances. Par exemple, les équation $x^2+5x=7$ et $x^6=x^5+1$ sont algébriques, mais ce n'est pas le cas de $\sin x = \frac{1}{2}$ à cause de la fonction sin.

Parmi les équations algébriques, il y a les équations de degré 2 auxquelles on est plus habitué. On sait qu'elles se mettent sous la forme $ax^2+bx+c=0$ (et on connaît alors une méthode pour les résoudre). Généralement, toute équation algébrique a un degré n (c'est le plus haut exposant qui apparaît dans l'équation) et s'écrit alors sous la forme :

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

où les a_i sont des nombres connus que l'on appell *coefficients*). Le théorème de d'Alembert (traité par ailleurs) stipule qu'une équation de la forme précédente admet toujours n solutions (éventuellement confondues) parmi les nombres complexes. Il s'énonce précisément sous la forme :

Théorème 1 *Soient $a_0, \ldots, a_n$ des nombres complexes avec $a_n \neq 0$. Il existe n nombres complexes $x_1, \ldots, x_n$ tels que l'on ait la factorisation :*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Dans cet article, nous allons étudier le cas où les coefficients dépendent d'un paramètre t de façon polynômiale. Ainsi, un exemple d'équation (qui peut paraître compliqué) qui nous intéressera est :

$$t^2X^6 + 6t^2X^5 + \left(8t^3 - 2t^2 + t\right)X^3 + \left(7t^4 - t^2 - 2t\right)X^2 + \left(8t^3 - 3t\right)X - t^8 + t^3 = 0.$$

L'inconnue est X, et comme le plus grand exposant qui décore X est 6, cette équation est de degré 6. Peu importe les exposants qui portent sur le paramètre t.

Résoudre l'équation consiste à trouver toutes les expressions[1] de X en fonction de t, qui vérifient l'égalité une fois réinjectées dans l'équation. Par exemple, si l'on a la patience de tout développer, on peut vérifier que $X = t-1$ est une solution. Remarquez bien que la vérification est purement formelle : on ne cherchera jamais par la suite à remplacer t par une quelconque valeur numérique ![2]

Le but de cet article est de trouver un bon analogue du théorème 1 dans cette nouvelle situation. En premier lieu, on se demande ce qui doit remplacer l'ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire l'ensemble dans lequel on va devoir chercher les solutions.

2 Où chercher les solutions ?

Les premiers exemples montrent qu'il est illusoire de penser trouver toutes les solutions parmi les polynômes. En effet, par exemple en comparant les degrés[3], on montre qu'il n'existe

[1] Expressions polynômiales *a priori* mais on verra par la suite que cela ne suffit pas.

[2] En particulier, lorsque, par la suite, vont apparaître des polynômes infinis, on ne se demandera pas s'ils peuvent être évalués.

[3] Sauriez-vous faire ce petit raisonnement ?

aucun polynôme X vérifiant l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$tX = 1 \quad \text{ou} \quad (t+1)\,X = 1.$$

Il faudrait au moins accepter les solutions qui s'écrivent comme quotient de deux polynômes, ce que l'on appelle les *fractions rationnelles*. Mais là encore, il reste de nombreuses équations qui n'admettent pas de solutions, comme les plus bêtes équations de degré 2 :

$$X^2 = t \quad \text{ou} \quad X^2 = t+1$$

comme on le voit encore par une considération de degrés. Il nous faut donc trouver un ensemble plus gros qui pourra loger toutes nos solutions.

2.1 Les séries formelles

L'idée, pour le moins originale, est de considérer des polynômes infinis, que l'on appelle plutôt *séries formelles*. On note $\mathbf{C}\,[\![t]\!]$ l'ensemble des expressions de la forme :

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n + \cdots$$

où les nombres c_i sont des nombres complexes.

Notez qu'il est possible d'additionner et de multiplier de tels objets. L'addition se fait sans problèmes. La multiplication est un peu plus délicate : il s'agit de faire des développements infinis et cela est possible comme on peut l'expliquer sur l'exemple suivant :

$$\left(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots + t^n + \cdots\right) \times \left(t + 2t^2 + 3t^3 + 4t^4 + \cdots + nt^n + \cdots\right).$$

On remarque que si l'on veut calculer le terme en t^2 du produit, on aura juste besoin de multiplier le 1 du premier facteur avec le $2t^2$ du second et le t du premier facteur avec le t du second. Ainsi dans le produit, le coefficient devant t^2 est $1 + 2 = 3$. De la même façon, on peut obtenir le coefficient devant t^n pour tout entier n.

L'intérêt des séries formelles est qu'elles permettent de résoudre au moins deux des équations citées précédemment à savoir $(t+1)\,X = 1$ et $X^2 = t+1$. Voyons comment.

On cherche des nombres complexes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ tels que :

$$(t+1)\left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n + \cdots\right) = 0.$$

En identifiant les coefficients, on arrive directement à $c_0 = 1$ et $c_i + c_{i+1} = 0$ pour tout $i \geqslant 0$. On en déduit l'unique solution suivante :

$$1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - \cdots + (-1)^n\, t^n + \cdots.$$

On procède de façon analogue pour la seconde équation. On cherche des nombres complexes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ tels que :

$$\left(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots + c_n t^n + \cdots\right)^2 = t + 1.$$

Il est cette fois-ci un peu plus délicat de faire le développement. Toutefois, on peut commencer par regarder les termes constants (*i.e.* en t^0). À gauche, il n'y a que c_0^2 et à droite il y a 1. Ainsi, $c_0^2 = 1$ et $c_0 = \pm 1$. On sépare alors les deux cas. Nous allons simplement esquisser le cas $c_0 = 1$.

On regarde le coefficient en t. Dans l'élévation au carré, un terme en t ne peut être obtenu que par multiplication d'un terme en t et d'un terme constant. Ainsi, à gauche, le terme en t sera $2c_0c_1 = 2c_1$ d'où on déduit $c_1 = \frac{1}{2}$. On regarde ensuite les termes en t^2 : on obtient $c_1^2 + 2c_0c_2 = 0$ puis $c_2 = -\frac{1}{8}$. On peut continuer ainsi... jusqu'au bout ! Voici le résultat que l'on trouve au final :

$$X = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} t^n + \cdots$$

où $n!$ désigne le produit $1 \times 2 \times \cdots \times n$. C'est un bon exercice (pas du tout facile !) de le trouver par soi-même ou même à défaut de vérifier qu'il convient bien.

2.2 Les séries de Laurent

Ce qui précède est bien joli, mais il y a encore un problème avec l'équation $tX = 1$. En effet, il est facile de voir que, même si X est une série formelle, le coefficient constant de tX est toujours 0 et que donc l'équation précédente n'admet pas de solution.

Il va donc falloir encore une fois augmenter l'« espace des solutions ». Évidemment on a envie qu'une solution de l'équation $tX = 1$ soit donnée par $X = \frac{1}{t} = t^{-1}$, et donc on a envie de rajouter l'élément t^{-1} à notre espace de solutions. Comme on en a envie, faisons-le !

Bien sûr, il faut pouvoir additionner et multiplier les éléments de l'espace de solutions, et donc le rajout de t^{-1} va impliquer le rajout de la somme de t^{-1} et d'une série formelle quelconque, mais également le produit de t^{-1} par lui-même, c'est-à-dire t^{-2} et ainsi de suite. On semble ainsi amené à considérer des éléments de la forme :

$$\cdots + c_{-n}t^{-n} + \cdots + c_{-1}t^{-1} + c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n + \cdots$$

Mais cela pose un problème pour la multiplication. En effet, si l'on essaie de développer le produit suivant :

$$\left(\cdots + t^{-n} + \cdots + t^{-1} + 1\right) \times (1 + t + \cdots + t^n + \cdots)$$

tous les produits de la forme $t^{-n} \times t^n$ vont donner un terme constant, et on n'est pas en mesure de calculer la somme de toutes ces contributions.

Il faut donc retravailler notre espace. Après réflexion, on se rend compte qu'il suffit de considérer les éléments de la forme :

$$c_{n_0}t^{n_0} + c_{n_0+1}t^{n_0+1} + c_{n_0+2}t^{n_0+2} + \cdots + c_n t^n + \cdots$$

où n_0 est un entier positif ou négatif (et qui varie d'un élément à l'autre). Dans un tel élément, il ne pourra apparaître qu'un nombre fini de termes en t^n pour n négatif ; cependant, on garde la souplesse d'autoriser des n arbitrairement petits. On vérifie ensuite, comme dans le cas de $\mathbf{C}[\![t]\!]$, qu'il est bien possible d'effectuer des additions et de développer des produits.

On obtient ainsi un nouvel ensemble, appelé ensemble des *séries de Laurent* et noté $\mathbf{C}(\!(t)\!)$. Et on a, cette fois, un premier théorème encourageant :

Théorème 2 *Toute équation algébrique de la forme $AX = B$ (donc de degré 1) où A et B sont des polynômes à coefficients complexes admet une (unique) solution X dans $\mathbf{C}((t))$.*

L'idée principale pour démontrer ce théorème ressemble fort à ce que l'on a déjà fait pour les équations $(t+1)X = 1$ et $X^2 = t+1$. On pose :

$$X = c_{n_0}t^{n_0} + c_{n_0+1}t^{n_0+1} + c_{n_0+2}t^{n_0+2} + \cdots + c_n t^n + \cdots$$

où les c_i sont des nombres complexes, on transforme la condition $AX = B$ en une condition sur les c_i, et on essaie de résoudre le système obtenu. Cependant, il y a, ici, une difficulté supplémentaire qui consiste à trouver n_0.

Pour cela, on aura besoin d'introduire la notion de valuation : la *valuation* d'une série de Laurent $X \neq 0$, notée $v(X)$, est le plus petit exposant (qui existe bien !) qui apparaît dans son écriture. Par exemple, la valuation de $t + t^2 + t^7$ est 1, celle de $t^{-1} + t^{-2} + t + t^5$ est -2 et celle de $t + 5$ est 0. On convient que $v(0) = \infty$.

La valuation possède des propriétés agréables vis-à-vis des opérations d'addition et de multiplication. Exactement, on a :

i) $v(XY) = v(X) + v(Y)$;

ii) $v(X+Y) \geqslant \min(v(X), v(Y))$ et l'inégalité précédente est une égalité dès que $v(X) \neq v(Y)$.

Fort de la notion de valuation, on peut déduire de $AX = B$, l'égalité $v(A)+v(X) = V(B)$ et donc $v(X) = v(B) - v(A)$. Il suffit maintenant de choisir $n_0 = v(B) - v(A)$. Cela fait, on trouve en comparant les termes de plus bas degré de AX et de B une équation (dont on vérifie qu'elle est de degré 1) ne faisant intervenir que c_{n_0}, d'où on déduit la valeur de c_{n_0}. En comparant ensuite les termes du degré immédiatement supérieur, on trouve une équation ne faisant intervenir que c_{n_0} et c_{n_0+1}. On connaît déjà la valeur de c_{n_0} et donc on obtient une équation en c_{n_0+1} (dont on vérifie qu'elle est de degré 1). On détermine ainsi la valeur de c_{n_0+1} et on continue comme ça jusqu'à l'infini...

2.3 Les séries de Puiseux

Le théorème précédent règle le cas du degré 1 mais l'équation $X^2 = t$ n'admet toujours pas de solution[4].

On va donc devoir une fois de plus agrandir notre espace de solutions. Pour avoir une solution à l'équation $X^2 = t$ le plus simple serait de rajouter l'élément $t^{1/2}$. De même, pour tout n on aimerait ajouter un élément $t^{1/n}$. On considère alors naturellement l'ensemble des :

$$\sum_{q \geqslant q_0} a_q t^q$$

où q_0 est un nombre rationnel positif ou négatif (qui varie d'un élément à un autre) et où la notation précédente signifie que l'on prend la somme des $a_q t^q$ pour tous les *rationnels* supérieurs ou égaux à q_0.

[4] Si c'était le cas, on devrait avoir $2v(X) = 1$. C'est impossible.

Seulement, encore une fois, ces expressions sont trop générales pour pouvoir être multipliées. Par exemple, on ne peut pas développer le produit suivant :

$$\left(t^{1/2} + t^{1/3} + t^{1/4} + \cdots + t^{1/n} + \cdots\right) \times \left(t^{-1/2} + t^{-1/3} + t^{-1/4} + \cdots + t^{-1/n} + \cdots\right)$$

car les produits de la forme $t^{1/n} \times t^{-1/n}$ fournissent une infinité de termes constants.

La solution consiste à imposer que toutes les fractions qui apparaissent en exposant dans la série puissent s'écrire avec un même dénominateur. On obtient ainsi ce que l'on appelle une *série de Puiseux*. Autrement dit, une série de Puiseux en t est une série de Laurent en $t^{1/D}$ pour un certain entier D (qui correspond au dénominateur commun). On vérifie alors que l'on peut bien additionner et multipler les séries de Puiseux. En outre, la notion de valuation s'étend.

3 Le théorème de Puiseux

On ne voit maintenant plus aucun obstacle évident à un énoncé analogue au théorème 1. Et de fait, on a le résultat suivant :

Théorème 3 (Puiseux) *Soient $A_0, \ldots, A_n$ des polynômes en t à coefficients complexes avec $A_n \neq 0$. Il existe n séries de Puiseux $X_1, \ldots, X_n$ telles que l'on ait la factorisation :*

$$A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \cdots + A_1 X + A_0 = A_n \left(X - X_1\right)\left(X - X_2\right) \cdots \left(X - X_n\right).$$

La démonstration de ce théorème est très proche de celle du théorème 2. Elle se décompose en deux étapes distinctes : on commence par déterminer les valuations possibles pour les solutions et une fois cela fait, on construit effectivement les solutions en calculant successivement les coefficients.

3.1 Le polygone de Newton

Expliquons comment on règle le premier point. Si X est une solution de l'équation :

$$A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \cdots + A_1 X + A_0 = 0$$

il est nécessaire que la plus petite valuation des termes du membre du gauche apparaissent au moins deux fois (si tel n'était pas le cas, la somme aurait pour valuation ce minimum, et donc ne saurait être nulle) et donc qu'il existe i et j tels que :

$$v(A_i X^i) = v(A_j X^j) \quad \text{soit} \quad v(X) = \frac{v(A_i) - v(A_j)}{j - i} \tag{1}$$

et tels que pour tout k on ait l'inégalité :

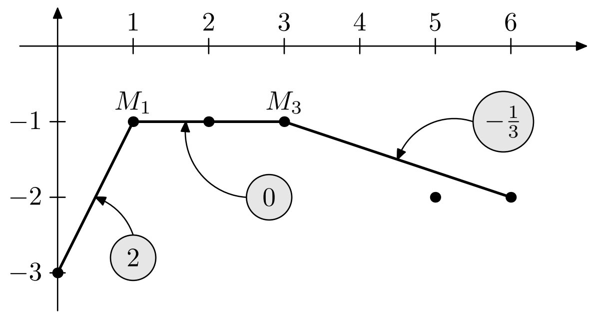
$$v(A_k X^k) \geqslant v(A_i X^i) = v(A_j X^j). \tag{2}$$

Les conditions précédentes peuvent s'interpréter graphiquement. Pour tout i tel que $A_i \neq 0$, on place dans le plan le point de coordonnés $(i, -v(A_i))$. L'équation (1) nous dit que les $v(X)$ autorisés sont parmi les pentes des droites (M_iM_j). L'inéquation (2) nous dit que parmi ces droites, on ne doit retenir que celle qui sont au-dessus de tous les segments du type $[A_kA_i]$ ou $[A_kA_j]$.

Reprenons pour illustration l'exemple de l'introduction :

$$t^2X^6 + 6t^2X^5 + \left(8t^3 - 2t^2 + t\right)X^3 + \left(7t^4 - t^2 - 2t\right)X^2 + \left(8t^3 - 3t\right)X - t^8 + t^3 = 0.$$

Le dessin associé, appelé *polygone de Newton* de l'équation, est :



et les segments tracés en gras sont ceux dont les pentes fournissent les valuations possibles pour X, qui sont donc 2, 0 et $-\frac{1}{3}$.

3.2 Quelques mots sur la fin de la preuve

On sélectionne une des valuations retenues, par exemple 0. On cherche X de valuation 0 vérifiant :

$$\underbrace{t^2X^6}_{\text{val=2}} + \underbrace{6t^2X^5}_{\text{val=2}} + \underbrace{\left(8t^3 - 2t^2 + t\right)X^3}_{\text{val=1}} + \underbrace{\left(7t^4 - t^2 - 2t\right)X^2}_{\text{val=1}} + \underbrace{\left(8t^3 - 3t\right)X}_{\text{val=1}} + \underbrace{\left(-t^8 + t^3\right)}_{\text{val=3}} = 0.$$

On identifie les termes de plus bas degré (ici 1) : si l'on écrit $X = a_0 + X'$ avec $a_0 \neq 0$, on obtient $a_0^3 - 2a_0^2 - 3a_0 = 0$ qui se simplifie en $a_0^2 - 2a_0 - 3 = 0$ et donne $a_0 = -1$ ou $a_0 = 3$.

On peut alors compléter ces deux débuts de solutions pour obtenir des séries de Puiseux solutions de l'équation de départ. La solution précédente $a_0 = -1$ fournit la solution $t - 1$ donnée dans l'introduction.

De façon générale, il est facile de voir que lorsque l'on cherche le premier coefficient d'une série de Puiseux solution de valuation v, on est amené à résoudre une équation à coefficients complexes dont le degré d est la longueur sur l'axe des abscisses du segment de pente v ; on obtient ainsi d solutions qui chacune fournissent une solution au problème de départ[5]. Cela implique qu'une équation de degré n admet toujours n solutions comme on le voulait.

[5] Toutefois, des problèmes assez subtils peuvent apparaître lorsque l'équation à coefficients complexes admet des racines multiples.

4 Conclusion

De même que lorsque l'on a à résoudre des équations algébriques à coefficients entiers, on est obligé d'aller chercher les solutions dans **C**, lorsque l'on a à résoudre des équations dont les coefficients sont des polynômes, on a besoin d'aller chercher les solutions parmi les séries de Puiseux. Remarquez toutefois que si l'on ne veut que les solutions polynômiales, il suffit de retenir celles-ci parmi toutes celles trouvées, de la même façon que lorsque l'on souhaite résoudre une équation algébrique en nombres entiers, on peut commencer par la résoudre en nombre complexes et ne garder parmi les solutions que celles qui nous intéressent.