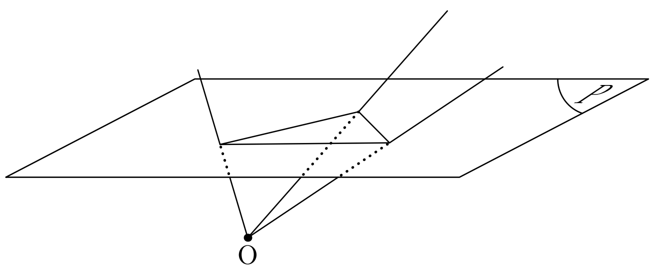
Le plan projectif

L'art de la géométrie réside très souvent dans les transformations du plan. Celles-ci permettent de transformer une figure en une autre où les choses deviennent plus simples à comprendre et à étudier. Toutefois si l'on veut espérer transporter certains informations que l'on a obtenu en étudiant la figure simplifiée à la figure d'origine, il va falloir que ces transformations conservent certains choses, c'est que l'on appelle un invariant. Les isométries sont par exemple les transformations qui conservent les distances, les similitudes sont celles qui conservent les rapports de distance, etc. Ce que l'on aimerait, nous, c'est trouver des transformations qui conservent l'alignement, ou ce qui revient au même qui conservent les droites. Mais si l'on conserve les droites, on va conserver les droites parallèles car deux droites qui ne se rencontraient pas avant transformation ne vont pas se couper miraculeusement après et donc notre transformation va aussi forcément conserver les directions. Et ça, ça ne nous plaît pas car ça ne donne pas assez de liberté pour modifier la figure comme on le voudrait. L'idée consiste alors à "éliminer" les droites parallèles et pour faire cela, on aimerait voir le plan dans quelque chose de plus gros où justement ces droites parallèles vont se couper. C'est cela le *plan projectif* et ce qui va nous intéresser, ça va être les transformations de ce plan projectif qui conservent l'alignement.

Description du plan projectif

Le plus simple et le plus naturel pour définir le plan projectif est sans doute de commencer par plonger le plan de façon intelligente dans l'espace ambiant. Considérons donc un plan P dans l'espace et un point O qui n'appartient pas à P. Un point M du plan P va alors être représenté dans l'espace par toute la droite (OM). Le sous-ensemble de P formé des deux points M et M' va alors naturellement être représenté par la réunion des droites (OM) et (OM'). Un cercle dans P sera représente par la réunion de toutes les droites reliant O à un point du cercle, ce qui est un cône. Et ainsi de suite.



Prenons maintenant deux points A et B dans P et voyons par quoi par être représentée la droite (AB). Ce sera bien entendu la réunion des droites reliant O à un point de (AB) et on obtient ainsi le plan (OAB). En fait, non. On obtient seulement presque tout le plan, on obtient tout le plan à l'exception de la droite D qui est parallèle à (AB) et qui passe par O, cette droite n'intersectant pas le plan P. C'est un peu décevant, on aurait préféré de loin obtenir tout le plan. C'est tellement décevant que l'on décide d'ajouter cette droite manquante et on décide même qu'elle correspond à un nouveau point de la droite (AB), celui qui est au bout.

Au bout ? Puis quel bout, d'abord ? Ben, les deux en fait. En effet, si l'on choisit des points M de plus en plus loin sur la droite (AB), la droite (OM) va se rapprocher de la droite D et ce indépendamment du sens dans lequel on s'éloigne. Il est donc légitime de dire que D correspond à un nouveau point qui est au bout de cette droite ou même plus précisément qui relie les deux bouts de cette droite. C'est ce que l'on appelle un *point à l'infini*.

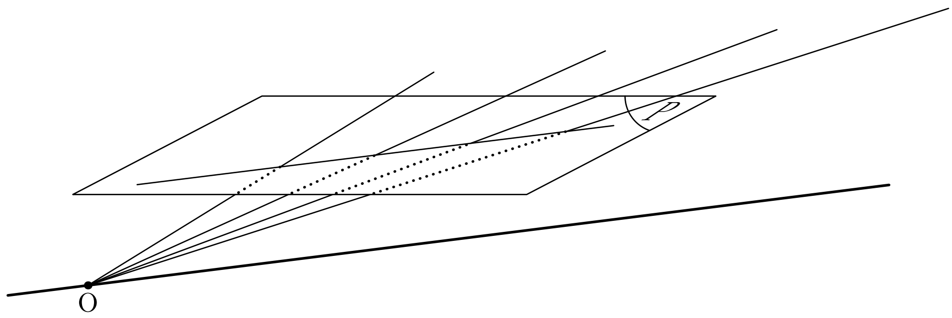


Illustration d'un point à l'infini

On complète ainsi le plan P en rajoutant des points à l'infini au bout de toutes les droites. Regardons si par hasard un point à l'infini ne peut pas être au bout de plusieurs droites à la fois. Ben en fait, si. Parce que vu dans l'espace ambiant, un point à l'infini ce n'est pas un truc comme ça qui tombe du ciel, que l'on décide d'ajouter arbitrairement. Un point à l'infini vu dans l'espace ambiant, c'est juste une droite parallèle à une certaine droite du plan P. Autrement dit, c'est juste une droite parallèle au plan P. Et si on prend M un point à l'infini, il va être au bout de toutes les droites de P qui vont être parallèles à la droite qui représente M dans l'espace ambiant. Une autre façon de dire cela est de voir un point à l'infini comme une direction et alors un point à l'infini est au bout d'une droite si et seulement si cette droite a la bonne direction.

On vient de voir que si l'on considère deux droites parallèles de P, le point à l'infini qui est à leur bout est en fait le même. Une autre façon de dire cela est de dire que nos deux droites parallèles s'intersectent en fait et précisément en ce point à l'infini. Plus généralement, considérons deux droites quelconques mais distinctes du plan P. Elles vont être représentés dans l'espace par deux plans distincts passant par O. Bien entendu leur intersection sera représentée par l'intersection de ces deux plans. Mais l'intersection de deux tels plans est toujours une droite (*Pourquoi ?*) et donc vu dans le plan (auquel on a rajouté les points à l'infini) l'intersection de nos deux droites sera toujours un et un unique point. Ce point sera un vrai point du plan si la droite qui le représente n'est pas parallèle à P ou encore si les deux droites que l'on intersecte se coupe réellement dans P. Ce point sera un point à l'infini dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque la droite qui le représente est parallèle au plan P ou encore lorsque les droites que l'on cherche à intersecter sont parallèles.

On vient de voir que toute droite de notre plan P complété est représentée par un certain plan passant par le point O. Le contraire est-il vrai ? Autrement dit, tout plan passant par O correspond-il à une certaine droite de P muni de ses points à l'infini ? C'est clairement le cas pour tous les plans qui ne sont pas parallèles à P, la droite qu'il représente étant tout simplement l'intersection de ce plan avec P. Mais qu'en est-il du plan passant par O qui est parallèle à P ? Par définition ce plan contient toutes les droites parallèles au plan P. Ces droites, comme on l'a dit, sont précisément celles qui correspondent aux points à l'infini. Donc vu dans le plan P complété avec les points à l'infini, le plan parallèle à P passant par O est l'ensemble des points à l'infini. Et comme il s'agit d'un plan, il est légitime de dire que l'ensemble des points à l'infini forme une droite, qui s'appelle sans grande surprise *droite à l'infini*.

Donc récapitulons. On vient de décrire un plan auquel on a rajouté des points à l'infini, un pour chaque direction, tous ces points étant alignés sur une certaine droite qui est la droite à l'infini. C'est ce truc bizarre que l'on appelle *plan projectif*. Une bonne façon de le voir est réellement de se le représenter dans l'espace comme nous venons de le faire pour le décrire. D'après ce que l'on a dit, se donner une figure (c'est-à-dire un ensemble de points) dans le plan projectif, c'est exactement se donner une figure de l'espace qui s'écrit comme réunion de droites passant par O, c'est-à-dire une figure de l'espace qui est stable par les homothéties de centre O, ou encore une figure de l'espace qui est telle que dès qu'elle contient un point M, elle contient toute la droite (OM). Avec cette description, on n'a plus de problème sur la façon a priori non intuitive d'interpréter les points à l'infini, puisqu'ainsi il s'agit de droites comme les autres.

Les homographies

Considérons maintenant une certaine figure F dans le plan projectif. Nous avons vu que l'on pouvait voir F dans l'espace comme un ensemble stable par les homothéties de centre O. À ce sous-ensemble de l'espace ambiant, que l'on va appeler F^s, on peut faire subir des transformations. On va ainsi obtenir un nouvel ensemble qui va correspondre à une nouvelle figure dans le plan projectif. Déjà il faut que notre transformation soit telle que la figure associée à F^s possède encore les propriétés requises, c'est-à-dire la stabilité par les homothéties de centre O. Cela revient simplement à imposer que notre transformation envoie une droite passant par O sur une droite passant par O. Mais ce que l'on aimerait également, comme on l'a dit, c'est que notre transformation conserve l'alignement, c'est-à-dire les droites, dans le plan projectif. Mais les droites du plan projectif sont les plans passant par O de l'espace ambiant. Ainsi il va falloir imposer en outre que notre transformation conserve les plans passant par O (ce qui implique d'ailleurs qu'elle conserve les droites passant par O – *Pourquoi ?*).

En fait, on va se restreindre juste à un certain type de transformations vérifiant ces conditions, plus précisément aux transformations de l'espace qui laissent fixe le point O et qui sont des *isométries*, c'est-à-dire qui conserve les distances.

Question 1. *Montrer qu'une isométrie laissant fixe O envoie un plan passant par O sur un plan passant par O. Montrer qu'elle envoie un plan ne passant pas par O sur un plan ne passant pas par O. En déduire que l'on a des résultats analogues pour les droites.*

Ce sont ces transformations du plan projectif associées à ces transformations particulières de l'espace que l'on va appeler dans ce document *homographies*[1].

Parmi ces transformations, il y en a qui vont laisser stable le plan P et d'autres non. Il est facile de voir que celles qui laissent stables le plan P vont envoyer les vrais points sur d'autres vrais points et les points à l'infini sur d'autres points à l'infini. En fait, de telles transformations vont être simplement des isométries du plan P et ce ne sont pas elles qui vont modifier la figure

[1] Normalement, une homographie est quelque chose de plus général. Plus précisément il s'agit d'une transformation du plan projectif qui est associée non pas à une isométrie mais à une bijection linéaire (terme que je ne vais pas expliquer) de l'espace ambiant. Mais en fait, pour les applications, cela revient en gros au même.

en profondeur. Par exemple, le fait que les vrais points et les points à l'infini ne soient pas permutés veut exactement dire que les droites qui étaient sécantes vont le rester, tout comme les droites qui étaient parallèles.

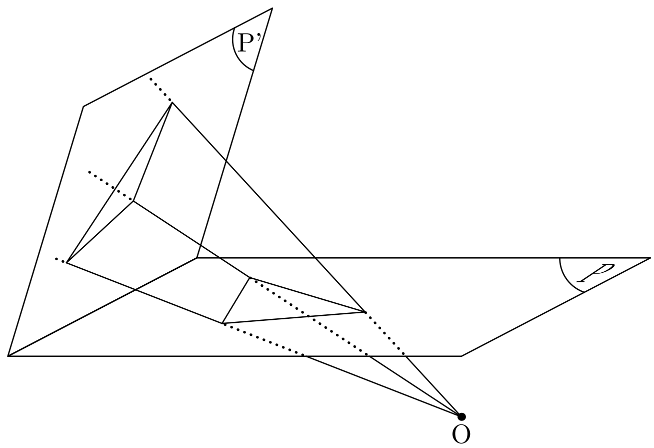
Par contre, les isométries laissant fixe O qui ne stabilisent pas le plan P, elles, sont beaucoup plus intéressantes. En effet, notons P' l'image réciproque de P par une telle isométrie que l'on va appeler f. P' est par définition l'ensemble des points qui sont envoyés par f dans P.

Question 2. *Montrer que P' est un plan.*

Appelons P_O (resp. P'_O), le plan parallèle à P (resp. P') passant par O.

Question 3. *Montrer que si deux plans sont parallèles, leurs images par f sont encore parallèles. En déduire que f applique P'_O sur P_O.*

Ceci veut exactement dire que la figure transformée est en fait F^s vu dans le plan projectif défini par P' et O. En particulier, ses vrais points s'obtiennent en regardant l'intersection de F^s et de P' et ses points à l'infini correspondent aux droites du plan P'_O qui sont contenues dans F^s.



Envoyons des points à l'infini

Comment utilise-t-on pratiquement les homographies ? Ce qu'il faut voir, c'est que si l'on a deux droites sécantes et que l'on arrive à trouver une homographie qui envoie le point d'intersection de ces deux droites sur un point à l'infini, dans la figure que l'on va obtenir les deux droites en question vont devenir parallèles et c'est bien plus sympathique. Bien sûr cela vaut aussi pour trois droites concourrantes. Si l'on arrive à trouver une homographie qui envoie le point d'intersection de ces trois droites sur un point à l'infini, elles vont devenir parallèles et donc les questions de concourrance vont pouvoir de temps en temps se ramener à des questions de parallélisme qui sont a priori plus simples à traiter.

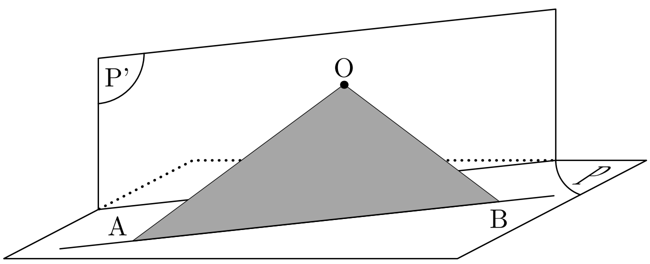
Mais voyons comment l'on peut trouver une homographie qui envoie un point donné M du plan projectif sur un point à l'infini. Supposons qu'une telle homographie existe et notons f l'isométrie de l'espace qui lui est associée. Notons également comme tout à l'heure P' l'image réciproque de P par f. On a vu que les points qui allaient être envoyés à l'infini étaient ceux qui étaient représentés par des droites contenues dans le plan P'_O, plan parallèle à P' et passant par O. Et nous, ce que l'on veut c'est que le point M soit envoyé à l'infini, c'est-à-dire exactement que la droite (OM) appartienne à ce fameux plan P'_O. Finalement, pour construire notre homographie, il suffit d'exhiber une transformation linéaire qui envoie un certain plan parallèle à la droite (OM) sur P.

En fait, on va prouver beaucoup mieux, on va prouver qu'étant donné un plan P'_O quelconque passant par O, on peut trouver une isométrie f de l'espace laissant fixe O et un plan P' parallèle à P'_O et ne passant pas par O, le tout tel que f envoie P' sur P. L'idée pour arriver à un tel résultat est de considérer le plan bissecteur des plan P'_O et P que l'on peut supposer sécants. Le problème c'est que ce plan ne passe pas forcément par O, et même en fait il n'y passe jamais. Mais qu'à cela ne tienne, on translate notre plan P'_O de façon à ce qu'il reste toujours parallèle à lui-même et ce jusqu'à ce que le nouvel plan bissecteur passe par O. On considère alors la réflexion par rapport à ce dernier plan qui fait bien ce que l'on veut.

Question 4. *Rédiger proprement cette démonstration.*

Ainsi l'on a prouvé qu'étant donné A un point quelconque de notre plan projectif, on pouvait trouver une homographie qui envoyait A sur un point à l'infini. Mais en fait, on a prouvé mieux que cela. Le résultat plus fort que l'on vient de démontrer implique qu'étant donnés deux points quelconques, que l'on va supposer distincts, A et B de notre plan projectif, on peut trouver une homographie envoyant A et B sur des points à l'infini, la droite (AB) étant alors naturellement envoyée sur la droite à l'infini.

Question 5. *Pourquoi une telle chose ?*

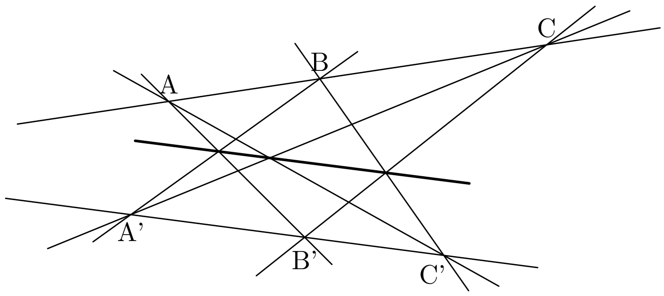


La droite (AB) envoyée à l'infini...

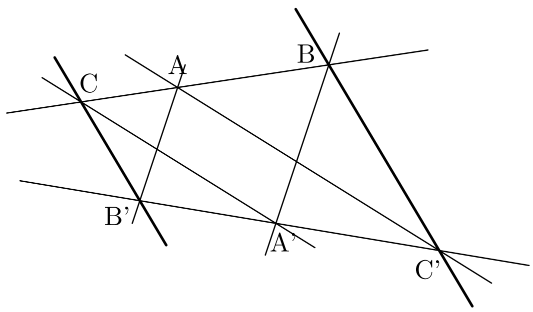
Avec des parallèles, c'est plus simple...

Comment utilise-t-on le résultat précédent en pratique ? Supposons que l'on dispose d'une figure un peu compliquée sur laquelle on nous demande de démontrer un alignement ou la concourrance de certains droites. Ce que l'on vient de voir, c'est que l'on est tout en fait en droit de choisir A et B deux points quelconques de la figure et de les envoyer à l'infini. Cela signifie concrètement que l'on a le droit de décréter que pour tous les points M de la droite (AB), les droites qui se coupaient alors en M sont désormais parallèles, bien entendu les anciens parallélismes ne vont pas être conservés mais en général ce n'est pas trop grave car lorsque l'on est réduit à faire ce genre de choses, c'est que l'on n'a pas de parallélisme. Ce qu'il y a de bien, c'est que cela n'altère ni les alignements, ni les concourrances, et donc par exemple montrer un certain alignement va revenir à montrer le même alignement sur la figure simplifiée avec plein de parallèles.

Donnons un exemple. Supposons que l'on veuille démontrer le théorème suivant connu sous le nom de théorème de Pappus : si deux triplets de points alignés (A, B, C) et (A', B', C') sont situés sur deux droites distinctes, alors les trois points d'intersection de (AB') et $(A'B)$, (AC') et $(A'C)$, (BC') et $(B'C)$ sont alignés.



Fixons des notations : appelons a le point d'intersection de (BC') et $(B'C)$, b celui de (AC') et $(A'C)$ et c celui de (AB') et $(A'B)$. Il s'agit de montrer comme on l'a dit que a, b et c sont alignés. L'idée est alors d'utiliser une homographie qui va considérablement simplifier la figure. Décidons par exemple d'envoyer les points b et c à l'infini. La figure se redessine alors de la façon suivante :



En effet, les droites (AC') et $(A'C)$ sont désormais parallèles puisqu'elles se coupent au point a qui est à l'infini. Il en est de même des droites (AB') et $(A'B)$. Et ce qu'il faut prouver c'est que le point d'intersection des droites (BC') et $(B'C)$ se situe sur la droite (bc). Mais b et c étant tous les deux à l'infini, la droite (bc) est la droite à l'infini et donc ce qu'il faut voir c'est que les droites (BC') et $(B'C)$ s'intersectent à l'infini, c'est-à-dire qu'elles sont parallèles.

Question 6. *En utilisant le théorème de Thalès, finir la démonstration du théorème de Pappus.*

Question 7. *Montrer en utilisant une méthode analogue le théorème de Desargues. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourrantes. Alors les trois points d'intersection de (AB) et $(A'B')$, (AC) et $(A'C')$, (BC) et $(B'C')$ sont alignés.*

Le birapport

Il est assez évident que les homographies ne conservent pas les distances quand on les regarde dans le plan. En effet, il est tout à fait possible d'envoyer des points à l'infini et donc de transformer des distances finies en distances infinies. Les rapports de distance non plus ne sont pas conservés. En effet supposons par exemple que notre figure soit simplement constituée de deux points A et B et de leur milieu I. Considérons un point quelconque M en dehors de la droite (AB). On a vu que l'on pouvait trouver une homographie envoyant B et M à l'infini. L'ensemble des points qui vont être envoyés à l'infini sera la droite (BM) et donc les points A et I vont rester de vrais points. On voit ici que le rapport $\frac{AI}{BI}$ n'est pas conservé.

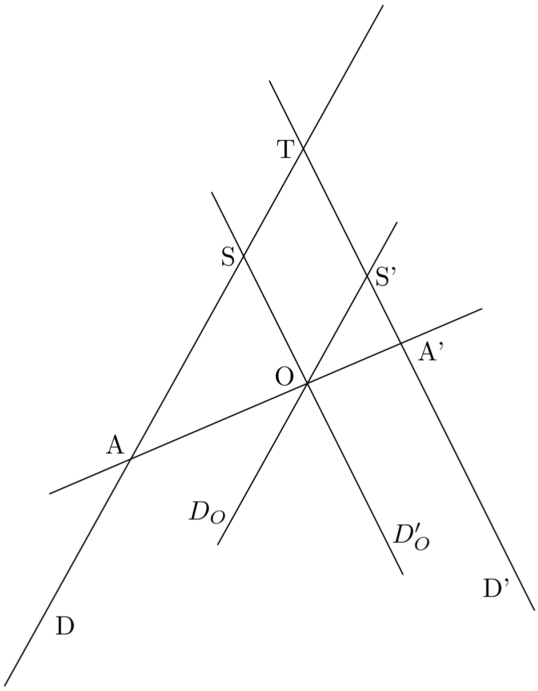
Toutefois, il y a quand même une quantité qui est conservée par les homographies, c'est ce que l'on appelle le birapport. Étant donné quatre points A, B, C, D distincts et *alignés*, on définit leur *birapport* comme le quotient suivant :

$$[A, B, C, D] = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}$$

où $\overline{AB}$ désigne la distance algébrique de A à B. Cela signifie que l'on choisit arbitrairement un sens sur la droite qui passe par A, B, C et D et que l'on compte les distances positivement dans ce sens et négativement dans l'autre. Le birapport de quatre points ne dépend pas du sens que l'on choisit pour orienter notre droite (*Pourquoi ?*).

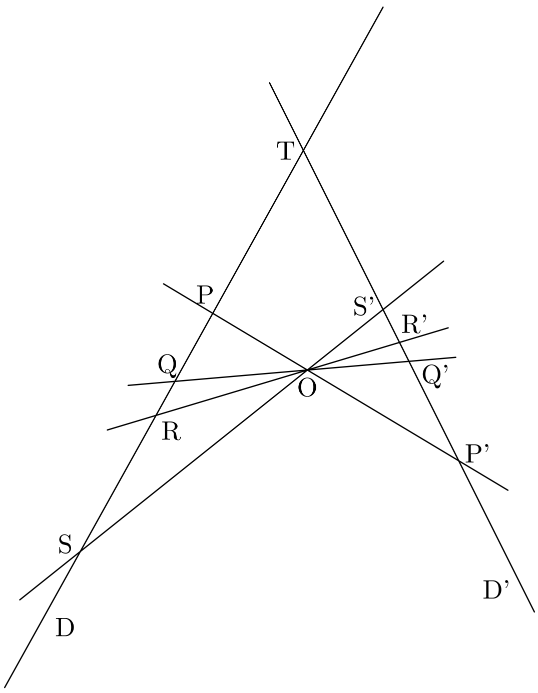
Il y a encore un problème à discuter. Il s'agit du cas où l'un des quatre points se trouve à l'infini (il ne peut pas y en avoir deux, car il n'y a qu'un seul point à l'infini sur une droite et que l'on a supposé que nos quatre points étaient distincts). Si le point à l'infini est A, les deux quantités $\overline{AC}$ et $\overline{AD}$ sont infinies et on convient de les simplifier le birapport étant alors simplement $\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$. De même pour les autres points.

Pour prouver que le birapport est invariant par homographie, on commence par étudier le problème suivant. On considère deux droites sécantes D et D', et on appelle T leur point d'intersection. On considère également un point O extérieur à ces deux droites. On trace ensuite la parallèle à D (resp. D') passant par O que l'on appelle D_O (resp. D'_O). On note S le point d'intersection de D et de D'_O et S' celui de D' et de D_O. On choisit maintenant A un point quelconque de D et on appelle A' l'intersection de la droite (AO) avec la droite D'.



Question 8. *Montrer que l'on a la relation* $\overline{AS} \cdot \overline{A'S'} = \overline{ST} \cdot \overline{S'T}$.

La deuxième étape consiste à considérer le dessin plus complexe suivant. On se donne encore nos deux droites D et D' que l'on suppose toujours sécantes et se coupant en T. On se donne en outre quatre points distincts P, Q, R et S sur D. On note P' l'intersection de la droite (PO) avec la droite D' et on définit de même les points Q', R' et S'.

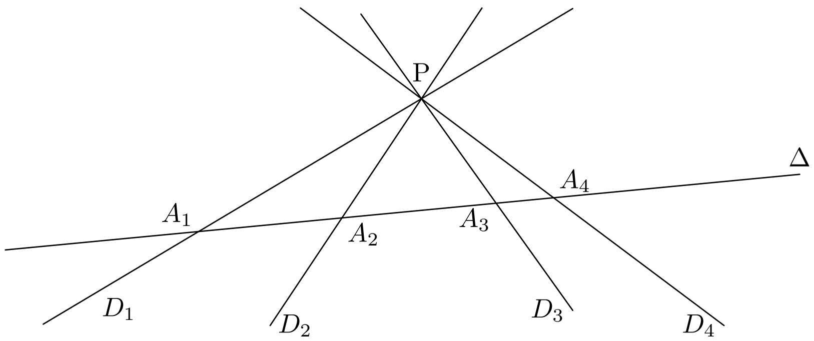


Question 9. *Montrer qu'ici le birapport est conservé, c'est-à-dire que l'on a l'égalité :*

$$\frac{\overline{PR} \cdot \overline{QS}}{\overline{QR} \cdot \overline{PS}} = \frac{\overline{P'R'} \cdot \overline{Q'S'}}{\overline{Q'R'} \cdot \overline{P'S'}}$$

Question 10. *En déduire que le birapport est conservé par les homographies.*

On peut définir également le birapport de quatre droites concourrantes (éventuellement en un point à l'infini, auquel cas, il s'agit de quatre droites parallèles). Cela est fort simple. On se donne donc D_1, D_2, D_3 et D_4 quatre droites concourrantes en un certain point P. Et on considère une droite quelconque qui ne passe pas par P, disons Δ. Δ va intersecter nos droites en quatre points (encore éventuellement à l'infini) que l'on note A_1, A_2, A_3, A_4 comme le montre le dessin ci-dessous.



Question 11. *Montrer que le birapport* $[A_1, A_2, A_3, A_4]$ *ne dépend du choix de la droite* Δ *et qu'il est donné par le quotient :*

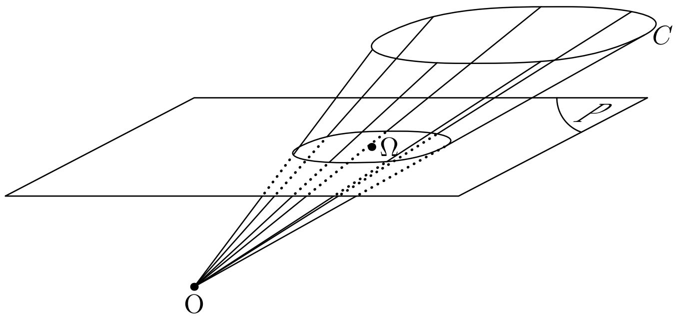
$$[A_1, A_2, A_3, A_4] = \frac{\sin \widehat{A_1PA_3} \cdot \sin \widehat{A_2PA_4}}{\sin \widehat{A_2PA_3} \cdot \sin \widehat{A_1PA_4}}$$

C'est cette quantité que l'on appelle le *birapport* des quatre droites concourrantes D_1, D_2, D_3 et D_4 et on la note $[D_1, D_2, D_3, D_4]$.

Question 12. *Montrer que le birapport de quatre droites est invariant par homographie.*

Les coniques

On a vu que les homographies conservaient l'alignement, c'est-à-dire qu'une homographie transforme une droite en une droite. On est en droit de se demander à quoi va ressembler l'image d'un cercle par une homographie. Bien entendu, comme ni les distances, ni les rapports de distance ne sont conservés, il n'y aucune raison a priori pour qu'un cercle soit tranformé en un autre cercle, et effectivement ce n'est pas le cas. Mais voyons déjà par quoi est représenté un cercle dans l'espace ambiant.



C'est ce que l'on appelle un *cône*. Notons-le $\mathcal{C}$. Comme on l'a vu, l'image de notre cercle de départ par l'homographie qui correspond à l'isométrie f de l'espace, n'est autre que l'intersection de notre cône par le plan P' image réciproque de P par f. Ainsi étudier les images possibles de notre cercle par une homographie revient à étudier les intersections de $\mathcal{C}$ par des plans P' image de P par une isométrie de l'espace laissant fixe O (*Pourquoi ?*). Mais on a vu également qu'un tel plan pouvait prendre toutes les directions possibles, au sens où si l'on se donne un plan P' quelconque de l'espace, il va exister un tel plan parallèle à P', disons P''. Mais si P' ne passe pas par O, P'' va être l'image de P' par une homothétie de centre O et donc les intersections respectives de $\mathcal{C}$ avec P' et P'' vont aussi pouvoir se déduire l'une de l'autre par une homothétie. Tout ça pour dire que si l'on ne s'intéresse qu'à la "forme" de l'image de notre cercle, on peut étudier de façon plus générale l'intersection de $\mathcal{C}$ par un plan ne passant pas par O sans se soucier du fait qu'il soit ou non image de P par une isométrie de l'espace laissant fixe O. Ces intersections sont ce que l'on appelle des *coniques*.

Question 13. *Se convaincre qu'une figure du plan projectif est une conique si et seulement si il existe une homographie qui l'envoie sur un cercle. Montrer que l'image d'une conique par une homographie est encore une conique.*

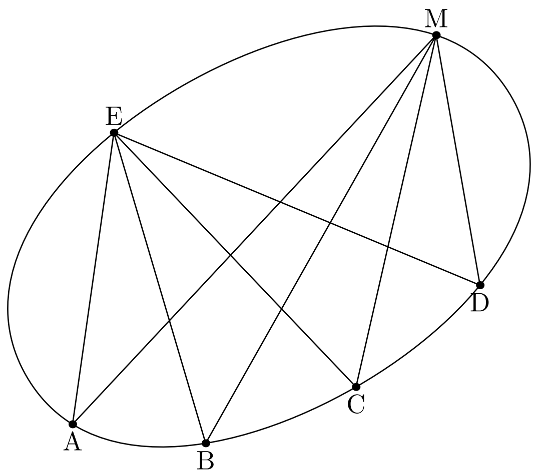
Il y a trois sortes de coniques, qui correspondent à des inclinaisons plus ou moins importantes pour le plan de coupe. Le cas limite est celui de la *parabole*, il correspond à un plan de coupe parallèle à une droite (OM) pour un certain point M placé sur le cercle de départ. Les plans moins inclinés correspondent à ce que l'on appelle des *ellipses*, les plans plus inclinés à ce que l'on appelle des *hyperboles*.

Question 14. *Donner l'allure d'une ellipse, d'une parabole et d'une hyperbole. Ne pas oublier de décrire les points à l'infini.*

Il existe plein d'autres présentations des ellipses. Il y a la présentation analytique qui consiste simplement à dire qu'une conique est l'ensemble des points du plan (projectif) de coordonnées (x, y) tels que $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme de degré 2 en les deux variables x et y. Bien entendu, on est capable au vu des coefficients de dire si l'on a affaire à une ellipse, une parabole ou une hyperbole mais la condition n'est pas quelque chose qui peut se voir directement. Une autre présentation possible est la suivante. On se donne une droite D dans le plan projectif et un point F n'appartenant pas à D. On se donne aussi e un réel strictement positif. On s'intéresse à l'ensemble des points M tels que le quotient $\frac{MF}{MD} = e$, où MD désigne la distance du point M à la droite D. Ce que l'on montre c'est que cet ensemble est une conique et que toute conique peut être obtenue ainsi, et ce d'au plus deux façons, les deux façons lorsqu'il y en a effectivement deux se déduisant l'une de l'autre par une symétrie. Là le type de la conique se lit directement sur e. Si $e < 1$ on a affaire à une ellipse, si $e = 1$ c'est une parabole et si $e > 1$, c'est une hyperbole. Donnons un peu de terminologie. F s'appelle un *foyer* de la conique, D la *directrice* associée à ce foyer et e est l'*excentricité*. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il n'est pas évident de construire, à partir d'un cône et d'un plan coupant ce cône, le foyer de la conique intersection du cône et du plan. En particulier, il est faux que le foyer est donné par la droite $(O\Omega)$ et que la directrice est donnée par le plan parallèle à P passant par O, avec les notations précédentes.

Il existe finalement une autre description des coniques qui rentre plus dans notre contexte ici et donc nous allons la présenter. Soit $\mathcal{C}$ une conique dans le plan projectif. On considère cinq points A, B, C, D et E deux à deux distincts sur $\mathcal{C}$.

Question 15 (Théorème de Chasles). *Montrer qu'un point M du plan projectif appartient à la conique $\mathcal{C}$ si et seulement si* $[(EA), (EB), (EC), (ED)] = [(MA), (MB), (MC), (MD)]$.



Question 16. *En déduire que par cinq points du plan projectif, il passe au plus une conique. Existe-t-il toujours une telle conique ?*