Au cœur des O.I.M.

Pierre Bornsztein et Xavier Caruso

Septembre 2008

Que sont les Olympiades Internationales de Mathématiques ?

Les Olympiades Internationales de Mathématiques (O.I.M.) existent depuis 1959. Il s'agit de la plus vieille compétition internationale de mathématiques et elle a lieu une fois par an dans un pays hôte, au Vietnam en 2007, en Espagne en 2008, en Allemagne en 2009, au Kazakhstan en 2010... Elle s'adresse aux élèves de moins de 20 ans n'ayant pas encore commencé d'études universitaires ou assimilables. Pour le système français, cela interdit par exemple la participation d'élèves de classes préparatoires et, compte-tenu du niveau requis, oblige à recruter principalement parmi les élèves de terminale. Il arrive cependant qu'un élève de première arrive à se glisser dans l'équipe de France et, pour la première fois en 2008, un élève de seconde a réussi cet exploit. La France participe régulièrement depuis 1969.

Cette année, du 10 au 22 juillet 2008 à Madrid, 103 pays étaient représentés, mais seulement 97 en compétition, pour un total de 535 candidats.

La compétition elle-même s'étale sur deux jours, en deux épreuves de quatre heures et demi chacune. Chaque épreuve comporte trois exercices, chacun noté sur sept points, le total maximal étant donc 42. Bien que chaque exercice rapporte autant de points, le premier énoncé de chaque journée est jugé plus facile que le second, lui-même plus facile que le troisième. Les exercices n°3 et n°6 sont supposés départager les meilleurs des candidats, et les jurys concernés sont également plus sévères. Il est donc fortement conseillé aux candidats de traiter en priorité les exercices n°1 et n°4 plutôt que de passer les trois premières heures sur l'exercice n°6...

Il est important de noter que ces énoncés sont très secs, laissant le candidat, souvent un peu dépourvu, devoir se débrouiller seul. Ils sont à l'opposé des longs problèmes traditionnels des épreuves de mathématiques françaises. Les lecteurs intéressés trouveront les énoncés et les solutions des problèmes des O.I.M. 2008 à la fin de cet article.

Les O.I.M. sont supposées être une compétition individuelle, mais depuis quelques années, le classement par pays apparaît de façon officielle. À l'issue des épreuves et corrections, les seuils d'attribution des médailles sont fixés. Traditionnellement, environ la moitié des candidats reçoivent une médaille et, parmi les médaillés, un sixième reçoit l'or, un tiers l'argent, et la moitié le bronze. Cela ne peut se décider qu'au regard de l'ensemble des résultats. Cette répartition est toujours sujette à débat car il est impossible de respecter exactement les proportions puisque l'on se voit mal couper un élève en douze. La question est encore plus épineuse lorsqu'il s'agit de couper (ou plutôt de ne pas couper) les points.

D'autre part, tout candidat non médaillé ayant résolu parfaitement un exercice se verra attribué une mention honorable.

Enfin, mais cela est de plus en plus rare, un candidat ayant trouvé une solution particulièrement originale et élégante pourra se voir attribuer un prix spécial du jury.

Qu'est ce qu'une délégation ?

Une délégation à une Olympiade est généralement composée de huit personnes qui se répartissent comme suit :

- Un chef de délégation (*Leader*), en général Claude Deschamps pour la France
- Un adjoint (*Deputy Leader*), en général Johan Yebbou pour la France
- Six candidats (*Contestants*), numérotés par ordre alphabétique de XXX1 à XXX6, avec XXX=FRA pour la France.

À ces gens peuvent s'ajouter des observateurs qui se répartissent encore en trois catégories A, B et C selon qu'ils restent aux côtés du chef de délégation, de l'adjoint ou des candidats. Par exemple, en 2007 à Hanoï, Xavier Caruso était observateur B, et a passé la totalité de l'Olympiade avec Johan Yebbou, épiant chacun de ses faits et gestes. Et, pour contredire immédiatement le paragraphe précédent, en 2008 à Madrid, c'était

Claude Deschamps lui-même qui était observateur A auprès de Johan Yebbou, devenu chef de délégation, et Pierre Bornsztein était adjoint. Enfin, bref !

La délégation française au Vietnam

(Une partie de) la délégation française en Espagne

Comment sont sélectionnés les candidats ?

Force est de constater que la France ne peut plus raisonnablement envisager un classement qu'autour de la 30$^{\text{ème}}$ place. Sans entrer dans un débat sur l'enseignement des mathématiques en France, on peut avancer deux raisons à cela :

- Un certain nombre de pays, les pays de l'est notamment, ont de très fortes traditions de compétitions mathématiques, locales, régionales, nationales et pour toutes les classes d'âges. Un candidat roumain (par exemple) qui participera aux O.I.M. aura sans doute plusieurs années d'expérience et d'entraînement derrière lui, alors que, il y a encore moins d'une dizaine d'années, un candidat français n'avait que deux semaines de préparation et n'avait jamais entendu parler de la compétition un mois avant.
  L'éclatement de l'URSS et de certains autres pays de l'Est a multiplié les équipes de haut niveau. L'URSS et les six candidats soviétiques ont ainsi laissé place à une dizaine de nations et à une soixantaine de candidats redoutables.
- Beaucoup de pays, par exemple l'Allemagne, le Royaume-Uni ou l'Italie pour ne citer que trois de nos plus proches voisins, ont décidé d'investir sérieusement dans une formation aux O.I.M. et sont systématiquement devant nous dans les classements. De façon générale, les candidats, mieux préparés, ont ainsi contribué à une élévation du niveau.

Aux O.I.M., la philosophie générale est que tout exercice doit possèder une solution considérée comme élémentaire pour l'ensemble des pays participants, selon leurs programmes d'enseignements respectifs et une base de notions ou de résultats supposés connus. Toute autre solution sera évidemment recevable et tout théorème qui ne trivialise pas l'exercice est *a priori* utilisable. Par exemple, les inégalités de convexité ou l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le théorème des restes chinois, des rudiments de théorie des graphes, le principe des tiroirs, les notions d'invariant, de puissance d'un point par rapport à un cercle, les théorèmes de Céva et Ménélaüs... doivent être maitrisés de tout candidat aux O.I.M. un peu sérieux. À l'inverse, l'utilisation des nombres complexes en géométrie ou des dérivées, qui peut paraître familière pour un candidat français, ne le sera pas forcément pour un autre candidat.

Cette année, le fait qu'une solution utilisait des résultats supposés connus comme l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$ ou comme le critère d'Euler a posé problème pour le choix de l'exercice n°3 (problème finalement surmonté par une solution évitant tout cela et présentée par Johan Yebbou).

Depuis une dizaine d'années, afin d'aider les candidats français à se préparer, l'association Animath organise des stages olympiques annuels qui accueillent désormais une trentaine de participants volontaires et repérés grâce à leurs résultats dans les quelques compétitions mathématiques qui ont lieu en France (Olympiades académiques de premières ou de quatrièmes, Tournoi des villes, concours Kangourou, FFJM, Tournoi du Limousin...), ou parce qu'ils sont membres de clubs de mathématiques très actifs (Orsay, Lyon...). Ainsi, cette année, du 18 au 27 août, 36 élèves des collèges et lycées se sont retrouvés au château de Grésillon pour une initiation aux exercices olympiques, dispensée par une dizaine d'animat(h)eurs bénévoles.

Puis, en début d'année scolaire, chaque élève intéressé peut rentrer, après un test de sélection, dans la formation proposée par l'Olympiade Française de Mathématiques (O.F.M.). Cette formation consiste en plusieurs envois d'exercices de diverses olympiades que l'élève cherche chez lui, normalement seul et parfois en temps limité, et dont il envoie à son tour les solutions à l'O.F.M. Les copies sont alors corrigées, notées et renvoyées à l'élève. À l'issue de ces envois, en vue de la formation de l'équipe de France, des tests de sélection surveillés sont organisés, cette fois-ci dans les établissements respectifs des élèves concernés.

Enfin, dans le mois avant le départ aux O.I.M., un dernier stage d'au moins une semaine est organisé pour les six membres de l'équipe de France, auxquels se joignent parfois certains élèves qui peuvent encore envisager une sélection future (parce que pas encore en terminale).

Il est important de signaler que, ces dernières années, quasiment tous les élèves qui sont ainsi partis aux O.I.M. ont participé à plusieurs stages avant d'être sélectionnés, et continuent à y participer tant qu'ils le peuvent. On ne redira jamais assez l'importance d'une formation commencée le plus tôt possible. À ce propos, le Concours Général, qui vient bien trop tard et n'est pas vraiment adapté au format olympique, ne peut plus être exploité. Dans le même ordre d'idée, si les Olympiades Académiques de Premières permettent de détecter des élèves brillants, ceux-ci ont parfois quelques difficultés à assimiler en à peine un an toutes les connaissances nécessaires pour être sélectionnés.

Ainsi, dans cette optique de formation de l'équipe de France, il nous apparaît important que des initiatives comme les Olympiades Académiques de quatrièmes, encore très confidentielles, se généralisent à l'ensemble des académies. Les observateurs étrangers de notre formation et de nos procédures sont souvent assez stupéfaits du peu de compétitions mathématiques « officielles » (locales, régionales, nationales) organisées dans notre pays.

Pour toute personne intéressée, signalons que le site internet d'Animath (`www.animath.fr`) contient de nombreuses archives d'exercices, d'envois, et des cours téléchargeables gratuitement.

Finalement, à l'issue de la procédure indiquée ci-dessus, l'équipe de France pour les O.I.M. 2008 était formée de Martin Clochard (Terminale), Rémi de Verclos (Terminale), Juliette Fournier (Terminale), Ambroise Marigot (Première), Jean-François Martin (Seconde) et Rémi Varloot (Teminale, premier prix du Concours Général de Mathématiques 2008).

Avant le début officiel de l'Olympiade

Les chefs de délégation arrivent quelques jours avant la cérémonie d'ouverture pour choisir collectivement les problèmes qui seront proposés lors de la compétition. Le choix s'effectue parmi les exercices de la liste courte, mise au point préalablement par le pays organisateur et résultant d'une première sélection des propositions envoyées par chacun des pays participants. Tout énoncé déjà utilisé dans une compétition ou jugé trop connu est éliminé d'office. Il en va de même normalement de tout résultat « ayant un nom », même si cette contrainte d'originalité est parfois difficile à respecter (le problème n°6 au Vietnam semble avoir échappé à la vigilance des chefs de délégation), et plus aussi rigide lorsqu'il s'agit des problèmes n°1 et n°4 (voir ci-dessous la remarque en fin de solution du problème n°1). Pour chacune des catégories Géométrie, Algèbre, Arithmétique, Combinatoire, les chefs de délégation évaluent la difficulté des problèmes, et proposent pour chacun un certain nombre de solutions différentes.

Le processus de sélection s'effectue alors en choisissant d'abord les exercices les plus faciles de chaque journée (les n°1 et n°4 donc). Il faut comprendre que « facile » signifie « que les six candidats bien entrainés d'un pays ayant une formation sérieuse vont sans doute tous résoudre ».

Puis, on choisit les exercices n°3 et n°6, supposés les plus difficiles. Cela fixe le niveau de l'Olympiade. Au Vietnam par exemple, ces deux exercices étaient vraiment très difficiles et ont fait beaucoup de dégâts parmi les candidats. Cette année, le jury a délibérement fait le choix de ne pas poursuivre dans cette voie même si, au bout du compte, les résultats n'ont pas été sensiblement meilleurs. Enfin, sont choisis les exercices n°2 et n°5.

Traditionnellement, il y aura deux exercices de géométrie et au moins un de chacune des trois autres catégories (sachant que l'Algèbre recouvre aussi bien les inégalités, les polynômes, les équations fonctionnelles... et que la Combinatoire désigne à peu près tout ce qui ne rentre pas dans les trois autres catégories).

Une fois le choix terminé, on passe à la phase de traduction dans toutes les langues officielles de l'Olympiade, sous l'œil vigilant de l'ensemble du jury afin d'éviter qu'une version donne un avantage par rapport à une autre.

Bien entendu, pendant cette période pré-Olympiade durant laquelle les exercices sont choisis, il semble préférable, afin de limiter les possibilités de triche, d'interdire tout contact entre les chefs de délégation et leurs équipes respectives. Selon les années, cette précaution est appliquée avec plus ou moins de sérieux et d'efficacité. Généralement toutefois, les chefs de délégation ne logent pas dans le même hôtel que leur équipe (et souvent aussi pas dans la même ville). Épisodiquement, il arrive que l'on assiste à des mesures de prévention plus rudes, comme la confiscation des téléphones portables jusqu'à la fin des épreuves. L'an dernier, au Vietnam, les mesures étaient exceptionnellement sévères : les chefs de délégation étaient quasiment emprisonnés dans leur hôtel, gardé par la police, sans autorisation de communiquer avec l'extérieur, et évidemment sans accès à Internet. Au bout de quelques jours, ne pouvant plus supporter cet isolement, ils ont obtenu le droit de sortir en ville en groupe de cinq minimum à condition de signaler tous leurs déplacements aux policiers de garde.

En fait, compte-tenu des moyens de communications actuels, il est clair que si l'on voulait tricher, ce ne serait sans doute pas si dur. Dans le passé, certains cas isolés de fraude ont été détectés et punis, mais toutes les O.I.M. reposent finalement sur la confiance et, le jour où celle-ci disparaitra, ce sera leur fin. L'éloignement des chefs est surtout utile pour éviter les fuites non intentionnelles lors de conversations (du type « il n'y aura pas d'inégalité cette année, ça changera » ou « tiens, il y a un exercice rigolo sur les graphes »).

L'arrivée

Dès la descente de l'avion, l'équipe d'organisation de l'Olympiade prend en charge les diverses délégations, et les conduit dans les hôtels ou résidences universitaires adéquats. À chaque délégation, il est en particulier affecté un guide chargé de rester auprès des élèves (et de servir d'interprète) pendant toute la durée du séjour. Traditionnellement, chaque participant reçoit un sac à dos contenant un carnet de notes, des stylos, un T-shirt, *etc.* Signalons que depuis quelques années, les hôtels sont plutôt luxueux, pas moins de trois étoiles, avec une tendance à la surenchère pour les hôtels des chefs de délégation. Ces dernières années, l'habitude semble se prendre de séparer tout de suite les adjoints (et les observateurs B) des élèves, un système de bus étant toutefois prévu pour que les adjoints puissent voir leurs élèves pendant les derniers moments précédant les épreuves.

Le soir, c'est l'occasion pour les adjoints de tous les pays de se retrouver pour dîner et de commencer à échanger les énoncés de leurs tests de sélection respectifs et divers petits cadeaux (l'un des auteurs de ces lignes se souvient avec lassitude avoir dû transporter et distribuer deux lourds et encombrants cartons de nougats de Montélimar...).

La cérémonie d'ouverture

C'est sans surprise la cérémonie d'ouverture qui marque officiellement le début de l'Olympiade. Elle comprend généralement plusieurs discours des responsables des Olympiades et du pays organisateur, et le défilé des candidats de tous les pays. Comme ils vont être amenés à monter sur scène, les candidats rivalisent d'élégance ou d'originalité : à Madrid, certains pays avaient prévus des costumes spécialement pour l'occasion, les français s'étaient préparés à défiler en T-shirts bleus, blancs ou rouges, les allemands avaient réalisé six T-shirts qui, alignés dans l'ordre adéquat, permettaient de lire la célèbre relation $e^{i\pi} + 1 = 0$. Mais, première mauvaise surprise, cette année l'organisation ne faisait défiler qu'un seul candidat par équipe, accompagnée d'un porte-drapeau local et du guide. On a ainsi assisté à un défilé de guides un peu frustrant, pendant lequel certains candidats devaient à la fois porter un drapeau, une mascotte et distribuer des cadeaux au public.

Finalement, un petit spectacle agrémente cette réception officielle, souvent des danses folkloriques du pays hôte. Cette année, comme la cérémonie avait lieu dans un établissement généralement réservé au cirque, ce fut l'occasion de voir de très bons jongleurs, acrobates et clowns.

Toujours pour des raisons de confidentialité, les chefs de délégation sont dans des tribunes séparées, et cette année ils se sont même retrouvés au perchoir (et deux ou trois d'entre eux ont d'ailleurs pris quelques risques afin de rattraper des morceaux de nougats lancés par Ambroise depuis la salle).

Bien sûr, à l'issue de la cérémonie, chefs de délégation d'une part, adjoints et candidats d'autre part sont reconduits dans leurs hôtels respectifs, si possible sans que ceux-ci n'aient pu ni se voir ni se parler. Puis, pour le déjeuner, alors que les chefs de délégation étaient reçus par le maire de Madrid, tous les candidats et adjoints se sont retrouvés pour un gigantesque (et excellent) buffet organisé dans l'une des résidence des élèves. Ce fût l'occasion de prendre en photo chacune des équipes.

Signalons que cette année, un e-journal quotidien appelé IMONEWS rendait compte avec humour de tout ce qui se passait.

Les épreuves

Pratiquement, les élèves sont tout d'abord transportés (en général en bus) de leurs lieux de résidence à la salle d'examen où ils se répartissent selon un plan de table défini à l'avance par le pays organisateur. Tout le nécessaire de travail est normalement fourni aux élèves au début de l'épreuve, notamment les feuilles et brouillon, mais il est malgré tout conseillé d'apporter quelques affaires personnelles (règle, compas, stylos de couleurs) et éventuellement de la nourriture ou des boissons. Rappelons que les calculatrices, ordinateurs... sont interdits.

À Madrid, deuxième mauvaise surprise, les candidats se sont retrouvés à devoir composer sur des tables à dessin avec des tabourets peu adaptés à leur propre travail. De leur côté, les adjoints qui, le premier jour, ont attendu plus d'une demi-heure dans l'espoir de voir leurs élèves avant le début de l'épreuve pour finalement apprendre qu'ils étaient déjà dans la salle depuis longtemps ont également un peu râlé. Mais, devoir gérer plus de six cents candidats et adjoints n'est pas une mince affaire et, dans l'ensemble, tout s'est bien passé.

La salle d'examen (en Espagne)

Seulement pendant la première demi-heure, les candidats sont autorisés à poser des questions sur d'éventuelles imprécisions de l'énoncé (de toute façon très rares) : il est donc important de prendre un peu de temps au début de l'épreuve pour s'assurer de bien comprendre l'intégralité de l'énoncé avant de se lancer dans la résolution du premier problème (qui est, rappelons-le, le plus facile et celui par lequel il faut commencer). Les questions doivent être posées par écrit et sont transmises sans retouche à l'intégralité des chefs de délégation (toujours par souci d'équité) qui décident collégialement quelle réponse il convient de donner et qui, la plupart du temps, est « L'énoncé est clair ! »... Il peut être surprenant qu'à ce niveau, certaines questions soient « Qu'est ce que l'orthocentre d'un triangle ? » ou « Je n'arrive pas à faire la figure au problème n°6, pouvez-vous m'aider ? » (véridique).

Le déroulement de l'examen est très codifié. Par exemple, chaque candidat dispose de panneaux qu'il est censé lever lorsqu'il souhaite adresser une requête. Ainsi existe-t-il un panneau « Help » pour signaler un problème urgent de santé, un panneau « More paper » pour demander de nouvelles feuilles de copie ou brouillon, un panneau « Toilet » pour demander à aller aux toilettes et finalement un panneau « Water » pour, vous l'aurez deviné, demander de l'eau. Si vous avez l'esprit un peu tordu comme notre dernier médaillé d'or, vous remarquerez que l'on peut s'amuser à combiner les panneaux pour obtenir des phrases comme « Help, more toilet water ! », mais ce n'est cependant pas conseillé. Bizarrement, il n'y a pas de panneau prévu pour poser une question sur l'énoncé. Dans les cas non prévus, il suffit normalement de lever la main et d'attendre qu'un humain vienne s'inquiéter du problème. Tout se déroule ensuite dans le silence le plus absolu.

Certains de nos candidats nous ont avoué que les épreuves d'une Olympiade peuvent être déstabilisantes pour beaucoup de raisons. Évidemment, il y a la nature, la difficulté des énoncés ainsi que l'aspect formel qui vient d'être mentionné. Mais, pour des élèves qui n'ont que les épreuves du Bac pour expérience (et encore pas tous), il y a aussi le fait de composer dans un pays étranger, dans une salle que l'on ne connaît pas, entouré de plus de cinq cents personnes que l'on n'a jamais vues, et dans une atmosphère un peu particulière (ce n'est pas tous les jours que l'on représente la France !). Bref, il semble utile d'avoir en tête ces aspects de la compétititon et éventuellement de s'être légérement préparé à les affronter sereinement. Cette année, les candidats avaient participé aux Olympiades Balkaniques qui, de ce point de vue, avaient servi de répétition générale bien utile (passons rapidement sur ce candidat, dont nous tairons le nom, qui s'est trompé de jour pour prendre l'avion...).

Voici ce qu'en écrit Jean-François Martin :

« Imaginez-vous entrer dans une salle, mais pas n'importe quelle salle : une salle d'examen avec presque cent rangées, contenant 550 personnes. Démesure... Pour atteindre votre place, tout au bout de la salle, il vous aura fallu cinq minutes. Puis l'attente, l'échéance qui se rapproche dans une ambiance de plus en plus stressée et stressante. On se replonge à cet instant dans les derniers conseils de nos coachs. On se raccroche intensément à tout le travail mené.

« Imaginez-vous alors, plus tard, en train de désespérer parce que vous n'avez trouvé que le premier exercice... Evidemment, c'est à ce moment là que vous vous décidez à vous retourner et à regarder la foule des autres derrière... Alors, je peux vous garantir qu'il devient encore plus difficile de ne pas stresser que de résoudre les trois exercices... et pourtant ça, c'est le rêve ultime de chacun !

« Mais le plus déstabilisant n'est pas cela, mais bien les tables... Elles offrent un superbe plan de travail très... trop incliné. Une descente infinie... déposer les feuilles au sol, les coincer sous les pochettes... tout stratagème est bon. Un désordre qu'on n'aime pas et qui n'épargne ni temps, ni travail. Imaginez alors la honte, le crime de lèse-silence qui attire les regards de vos voisins et leur aide désabusée, suivie d'une nuée d'examinateurs : il est terrible le bruit de la pochette de matériel qui tombe dans le silence absolu de la salle.

« Mais les O.I.M., c'est bien plus qu'une épreuve individuelle. On est porté par ceux qui nous ont entrainés. On recueille les encouragements de tous : les autres français bien sûr, mais aussi les allemands, avec qui on a partagé d'autres aventures. La table d'un français, point de rassemblement de l'équipe allemande ! On échange avec ceux qui nous entourent, indiens, georgiens, parfaits inconnus, tous dans le même bateau. On peut être en équipe de France mais toujours cosmopolite. »

Enfin, au terme des quatre heures et demi, les élèves rendent leurs copies et *tous* leurs brouillons. En effet, une simple remarque d'apparence anodine peut rapporter des points (nous reviendrons là-dessus lorsque nous parlerons des coordinations). Après le gong final et le ramassage des copies, les élèves retrouvent les adjoints (qui, pendant ce temps, ont eu des visites organisées) qui les attendent de pied ferme pour leur demander leurs premières impressions sur l'épreuve et quels exercices ils ont résolus intégralement ou partiellement. C'est le moment de décompresser, comme ce candidat urugayen qui déclarait à sa sortie « Oui, oui, j'ai résolu les trois exercices d'aujourd'hui, puis j'ai attaqué le n°4, le n°5, le... ». C'est également à ce moment que les adjoints prennent connaissance du sujet de l'Olympiade. Ainsi, ils sont plus ou moins démunis devant les commentaires des élèves qui s'enchaînent souvent très vite. Comment répondre par exemple intelligemment à « Pour l'exercice n°2 (note : de l'an dernier), j'ai utilisé la droite de Simson, c'est bien ? » ou à « Moi, j'ai tout ramené aux nombres de Stirling, hein ? » lorsqu'on découvre à peine l'énoncé ? C'est aussi l'occasion rêvée pour les élèves de justifier leur échec en argumentant que la difficulté des exercices n'avait rien à voir avec celle des années précédentes (« Non, mais l'exercice n°2 est infaisable ! »). Évidemment, les adjoints et leurs observateurs déchantent rapidement après s'être plongé quelques minutes dans le sujet... Blague à part, cette rencontre post-épreuve est très importante pour la suite des événements puisque ce sont les adjoints (avec les chefs) qui devront défendre les copies de leurs candidats. Ainsi, sachant à l'avance quelles pages sont importantes, quels arguments sont incomplets, quelles sont les idées directrices, *etc.* ils auront plus de facilité par la suite à bâtir une argumentation qui rapportera le maximum de points à la copie (on ne donnera toujours pas ici le nom du candidat, le même que pour l'avion râté, qui a pris la fâcheuse habitude de numéroter ses brouillons dans un ordre aléatoire, rendant leur étude impossible par toute personne non initiée, en particulier les membres des jurys de coordination). Elle permet également aux adjoints de remotiver des élèves déçus, à tort ou à raison, par leurs performances.

L'après-midi qui suit est en généralement laissé libre pour tout le monde. Il faut noter qu'il est mis à la disposition des élèves (et aussi des adjoints) de nombreuses activités pour occuper leur temps libre : on compte traditionnellement des salles de jeux (jeux de société, échecs), des salles informatiques avec accès à Internet, des installations sportives, et bien d'autres choses encore.

La seconde journée d'épreuve se déroule de façon semblable pour les candidats, mis à part que cette année, contrairement au premier jour, adjoints et élèves ont cette fois pu se voir avant l'épreuve. C'est l'occasion des derniers conseils (« Ne cherchez pas le théorème qui tue tout. Rappelez-vous qu'une équivalence, ça peut aussi se démontrer par deux implications réciproques, et que chacune d'elles va rapporter environ la moitié des points. »), de faire le point sur les performances des autres candidats suite aux discussions de couloirs entre adjoints et de se remotiver (« D'après ce que je sais, les autrichiens sont dans les choux, les allemands ne sont pas au top, et vous êtes loin d'être les seuls à ne pas avoir réussi l'exercice n°2. Rappelez-vous que le bronze est autour de 14 points, donc vous êtes dans le coup. Vous me faites tous l'exo n°4 et hop. »).

En fait, les changements concernent essentiellement les chefs de délégation, les adjoints et les observateurs qui vont commencer à préparer les coordinations déjà prévues pour le lendemain.

Les coordinations

Dès le lendemain de la seconde épreuve, et parfois même dès le début de la deuxième journée d'épreuve donc, commencent la correction et la notation des copies, en préparation des rencontres avec les jurys concernés (et appelées *coordinations*). Pour cela, on commence par réunir chefs et adjoints dans un même hôtel. Le plus souvent, ce sont les adjoints qui changent d'hôtels et se déplacent jusqu'à l'hôtel des chefs, l'avantage étant d'éloigner la coordination du lieu de résidence des élèves. Cette année, chefs et adjoints ont tous fait la moitié du chemin pour se retrouver dans un nouvel hôtel, finalement déjà investi par les jurés coordinateurs.

Les copies et brouillons sont également acheminés sur les lieux de coordinations et photocopiés. Un exemplaire (l'original) revient au chef de délégation et l'autre aux coordinateurs. Évidemment, les chefs ne reçoivent que les copies de leurs élèves, alors que les coordinateurs ont un exercice attitré et récupèrent ainsi plus de cinq cents copies. À Madrid, pour chaque exercice, il y avait cinq jurys de coordination de trois personnes, auxquels il fallait ajouter des superviseurs de coordination qui surveillaient les cinq tables. La plupart de ces personnes étaient des mathématiciens espagnols, bien que quelques unes, habituées des compétitions internationales, soient venues en renfort d'autres pays. Les deux partis prennent connaissance du contenu du travail des élèves et mettent chacun indépendamment une note selon un barème très précis. Pendant les deux jours suivants, se succèdent donc les coordinations : selon un planning décidé à l'avance, chefs, adjoints et observateurs rencontrent les coordinateurs et se mettent d'accord (ou pas) sur la note à attribuer à l'élève. Signalons que, même si tout se passe dans une ambiance très cordiale, les jurys de coordination des O.I.M. sont impitoyables et ne donnent pas facilement les points. Ils suivent à la lettre les barèmes établis et quasi sacrés, sans jamais transiger, sauf dans le cas d'une solution originale hors barème. Dans le cas des exercices sélectifs n°3 et n°6, ils sont même encore plus durs et refusent à peu près toute solution non aboutie. Généralement donc, il n'y a pas vraiment matière à pinailler. Malgré tout, comme nous allons le voir de façon plus détaillée ci-dessous, il peut apparaître des discussions lorsque la copie traitée n'est pas claire, typiquement lorsque les principaux arguments ne sont pas dans l'ordre ou dissimulés dans les brouillons. Il s'agit alors d'expliquer aux coordinateurs que la copie a plus de valeur qu'il n'y paraît au premier regard, afin d'obtenir quelques points supplémentaires. Il va sans dire que si l'on arrive parfois à obtenir quelques miettes, cela n'est pas comparable avec ce que l'on pourrait avoir avec un effort minimum de rédaction (comme quoi, O.I.M. ou pas, on en revient toujours aux mêmes exigences).

Une salle de coordination (en Espagne)

En pleine discussion pour grignoter quelques points

Avant de continuer, donnons quelques idées sur la manière dont ces barèmes sont conçus et utilisés. Souvent, plusieurs solutions sont envisageables pour résoudre un exercice et, dans ce cas, les plus naturelles d'entre elles sont complétement balisées : tel résultat intermédiaire rapporte tant de points, tel autre en rapporte tant mais seulement si la démarche du candidat montrait clairement qu'il avait une idée assez précise de la façon de l'utiliser, *etc.* Par exemple, au Vietnam, le barème octroyait plus ou moins un point si, dans l'exercice d'arithmétique, le candidat avait parlé de descente infinie sans pour autant avoir développé cette piste. Et cette année, le barème prévoyait d'attribuer un point dans l'exercice n°5 à tout candidat dont la copie mentionnait le 2^{k-n} attendu même s'il n'y avait rien écrit d'autre. Par ailleurs, selon des critères qui peuvent parfois apparaître comme subjectifs, une tentative de solution sera considérée soit comme « début de solution », et le barème accordera alors rarement plus de deux points, soit comme « solution presque complète » auquel cas la note ne descendra probablement pas en dessous de cinq points. Habituellement, dans ce dernier cas, il est retiré un point par erreur ou lacune. D'autre part, un candidat qui aborderait un exercice selon plusieurs angles et obtiendrait ainsi plusieurs débuts de solutions ne verrait pas les points s'additionner. Finalement, il arrive que la copie ne suive pas clairement un cas prévu par le barème : il est possible que la solution soit totalement originale, mais il est plus fréquent que certains résultats soient prouvés sans véritable cohérence, et surtout répertoriés dans plusieurs solutions distinctes. C'est alors à la force de l'argumentation des chefs et adjoints que se joue la note finale. Malgré tout, il est rare que celle-ci puisse atteindre des sommets faramineux.

En général donc, l'accord est trouvé, ce qui s'officialise par la signature de la feuille de notes. Cependant, bien que ce soit assez rare, il est possible qu'au terme de leur petite délibération, les avocats (chefs et adjoints) et les coordinateurs n'arrivent pas à se mettre d'accord sur la note finale. Dans cette situation, on remonte dans la hiérarchie, et c'est d'abord le chef des coordinateurs qui continue l'arbitrage. Si le désaccord persiste à l'issue de ce second round, la décision finale est votée par l'ensemble des chefs de délégation lors de la dernière réunion du jury dont on parlera plus loin.

Revenons à cette année.

Pour le premier jour, on nous a programmé les coordinations des exercices n°3, n°5 et n°1. Nous commençons donc par la coordination de l'exercice n°3, qui dure moins de deux minutes, aucun de nos candidats ne l'ayant réellement abordé. La seule petite déception vient de ce que l'adjoint belge, blagueur, nous avait fait croire que le seul fait de mentionner que l'on choisissait un nombre premier p de la forme $4k+1$ pouvait rapporter un point. Puis, nous passons à la coordination de l'exercice n°5. La solution de Jean-François (voir à la fin de l'article) est considérée comme complète et lui rapporte les sept points prévus, même si le jury précise qu'il aurait été en droit de retirer un point car certaines propriétés du couplage utilisé ne sont pas clairement établies, mais que l'esprit l'emporte sur la rigueur. La discussion commence en fait à propos de la copie de Martin qui, un peu en vrac, a bien attaqué le problème en exprimant les quantités à étudier sous forme de sommes de nombres multinomiaux. Il propose ensuite une réécriture tout à fait valable de ces sommes, expressions qu'il semble quasiment impossible de deviner et qui apparaîssent plus naturellement par utilisation de fonctions génératrices. Ces expressions, il pense pouvoir les démontrer par récurrence, mais ne s'y lance pas clairement. Pourtant, un peu réécrites à nouveau (ce qu'il n'a pas fait), elles donnent immédiatement la solution de l'exercice. Le jury, un peu perdu dans les brouillons et dans des photocopies de pas très bonne qualité, n'avait rien vu de tout ça (d'autant plus que Martin a consciencieusement tout rayé...) Le problème est que cette démarche combine trois des solutions prévues et qu'il y a des trous car des étapes ne sont pas démontrées. Pourtant, l'obtention de certaines des formules ne peut être le fruit du hasard et notre espoir est de faire passer un « début de solution » en « solution presque complète ». Après vingt minutes de discussions, le jury demande une suspension de coordination le temps d'y voir plus clair et d'en référer au superviseur.

Les coordinateurs de l'exercice n°6 nous font savoir qu'ils sont libres et prêts à discuter de nos copies alors que cette coordination n'aurait dû avoir lieu que le lendemain. Nous sommes un peu pris de court, mais seul Ambroise a attaqué ce problème sans aller très loin. Nous acceptons, en demandant toutefois un délai d'une demi-heure pour nous préparer. En fait, le jury s'attendait à six zéros, et n'avait pas vu qu'Ambroise, fidèle à son habitude, utilisait des notions de géométrie projective pour donner une caractérisation non triviale et géométrique du point remarquable étudié dans l'exercice, mais sans arriver à conclure. Or justement, mot pour mot, le barème attribuait un point pour une telle caractérisation, et si un des jurés ne voulait rien savoir sous prétexte que, s'agissant d'un n°6, toute solution autre qu'officielle devait être aboutie pour être considérée, les deux autres semblaient accepter l'idée que cela pouvait avoir de la valeur. Il nous était d'ailleurs facile de nous abriter pour une fois derrière le barème sacré et de préciser qu'une telle démarche pouvait effectivement aboutir, une solution analogue ayant été proposé sur le site international `www.mathlinks.ro` (site que nous conseillons d'ailleurs de fréquenter, et notamment ses divers forums qui voient défiler chaque jour un nombre considérable d'exercices de tous niveaux). Après encore vingt minutes de discussions, le jury nous demande de lui fournir cette solution, ainsi qu'une suspension de coordination le temps de l'étudier.

À leur tour, les coordinateurs de l'exercice n°2 nous font savoir qu'ils sont libres et eux aussi prêts à discuter de nos copies... Comme nous étions bien préparés sur cet exercice, nous acceptons cette coordination non prévue, juste avant que les coordinateurs de l'exercice n°5 nous rappellent pour nous annoncer leur décision de n'accorder finalement qu'un seul point à Martin. Ils ont décidé de s'arrêter au premier trou de la démonstration sans tenir compte de la démarche générale, en nous présentant un barème adapté à ce cas déjà rencontré par un autre jury, et donc par souci d'équité avec le candidat allemand qui a soulevé une difficulté similaire. Nous sommes un peu déçus, mais pas trop surpris compte-tenu des règles en vigueur aux O.I.M.

La coordination de l'exercice n°2 s'annonce plus simple car seul Martin (encore) a avancé dans le problème. En fait, pour les autres candidats français, Rémi Varloot excepté, nous arrivons à gagner un point qui se révélera très important lors de l'attribution des médailles. En effet, dans leurs multiples tentatives, ils ont tous les quatre effectués des changements de variables, sans arriver à les exploiter, mais que nous arrivons à faire interpréter comme des « débuts de solutions ». De son côté, Martin a résolu entièrement l'exercice mais il est allé un peu vite à la fin. En résumant, disons qu'il affirme qu'ayant à sa disposition une infinité de rationnels a et b, il peut obtenir une infinité de valeurs différentes d'une quantité fonction du rapport $\frac{a}{b}$. Il aurait dit qu'il choisissait par exemple $b = 1$, cela lui donnait ses sept points. Mais le jury insiste, à juste titre, sur le fait que n'importe quelles infinités de rationnels ne permettent pas de conclure puisque si l'on se restreint par exemple aux $b = 2a$ il va y avoir un problème, ce que Martin avait d'ailleurs lui-même vu dès sa sortie de l'épreuve. De plus, il y a une petite erreur de calcul qui seule n'aurait sans doute pas été sanctionnée. Et donc, dans ce contexte le jury ne veut attribuer que six points. Avec, avouons-le, un peu de mauvaise foi de notre part, nous essayons pendant vingt minutes de convaincre le jury qui ne veut pas en démordre et évoque lui aussi le cas similaire d'un candidat allemand (note : la prochaine fois, penser à passer en coordination avant les allemands). Comme la France a une réputation de fair-play que nous tenons à conserver, nous finissons par accepter les six points.

Le jury de l'exercice n°6 nous rappelle alors et nous annonce qu'effectivement Ambroise a gagné son point.

C'est donc avec le sourire retrouvé et une grande confiance que nous attaquons la coordination de l'exercice n°1 pour laquelle nous pensons avoir six solutions complètes. Tout se passe bien pour cinq des copies qui reçoivent effectivement leur sept points chacune. Mais pour la sixième, le jury n'a rien vu et veut donner zéro. Il est vrai que les brouillons sont dans un désordre complet et que si le candidat (toujours le même, dont nous tairons une fois de plus le nom) ne nous avait pas prévenu, nous n'aurions peut-être pas réussi à recoller tous les morceaux. Le jury est bien obligé de reconnaître que la copie a effectivement plus de valeur qu'il ne le pensait, mais ne semble pas arriver à se faire à l'idée de passer de zéro à sept points. Du coup, un des jurés attaque sous un angle surprenant en affirmant qu'un résultat prouvé sur un des côtés du triangle n'est pas établi sur les autres sous prétexte que la démonstration n'est pas symétrique. Encore vingt minutes de discussion pour lui faire admettre qu'un fait géométrique, prouvé de quelque façon que ce soit (et ici, d'ailleurs, la démonstration était en fait symétrique) sur un des côtés, est valable sur les autres puisque la configuration de l'énoncé est justement définie de manière symétrique. Enfin, nous sortons avec les 42 points attendus et nous tenons les élèves au courant de ces résultats.

Le lendemain, nous abordons la coordination de l'exercice n°4, pour laquelle nous attendons à nouveau 42 points. Et surprise, pour une fois, tout se passe sans difficulté. Nous sortons des coordinations avec un gros motif de satisfaction : pas de point perdu sur les exercices n°1 et n°4, et 104 points au total. Seule inquiétude, l'Olympiade est considérée comme plus facile que les précédentes et les seuils de médailles risquent d'être plus hauts. Les rumeurs circulent et, alors que certaines années 14 points donnaient le bronze, on parle même maintenant de 17 points, ce qui évidemment, serait une catastrophe pour l'équipe de France.

Pendant ce temps, sur un mur, sont projetés les résultats connus, pays par pays, candidat par candidat, et actualisés presqu'en temps réel.

Mais une autre coordination nous attend : par souci d'équité, les coordinations du pays hôte ne peuvent se faire avec les jurys habituels puisque formés essentiellement de ses ressortissants. Ce sont donc les chefs et adjoints et observateurs du pays qui a proposé un exercice qui forment le jury pour cet exercice. Et justement, cette année, l'exercice n°5 a été proposé par la France (plus précisément par Bruno Le Floch et Ilia Smilga) donc nous nous retrouvons pour une fois de l'autre côté de la table. Évidemment, les photocopies du travail des candidats espagnols nous ont été fournies et avec l'expérience de nos copies et de notre coordination, il est plus facile de repérer rapidement les points ou lacunes d'une copie. Cela étant, pour un exercice de combinatoire, il nous est parfois nécessaire de demander l'aide d'un traducteur, ce qui ne pose pas de problème dans une réunion internationale de mathématiciens. Finalement, tout se passe comme d'habitude dans la plus grande courtoisie... et sous les yeux vigilants de tous les coordinateurs attitrés. Signalons quand même que, juste retour des choses, le candidat allemand qui nous avait coûté des points, en aura également fait perdre aux espagnols.

La dernière réunion du jury

A l'issue de la coordination, l'ensemble des chefs de délégation se réunit une dernière fois. Comme mentionné ci-dessus, ils examinent d'abord les éventuels conflits non encore résolus entre avocats et coordinateurs. Ils décident ensuite les seuils d'attribution des médailles de bronze, d'argent et d'or.

Cette année, l'or était décerné à partir de 31 points, l'argent à partir de 22 points, et le bronze pour 15 points. Pour l'équipe de France, cela se traduisait en une médaille d'argent et quatre médailles de bronze, à un point des six médailles que constituent l'objectif français. Plus précisément, les résultats individuels étaient les suivants :

Martin Clochard :	$7+6+0+7+1+0=21$,	médaille de bronze
Rémi de Verclos :	$7+1+0+7+1+0=16$,	médaille de bronze
Juliette Fournier :	$7+1+0+7+0+0=15$,	médaille de bronze
Ambroise Marigot :	$7+1+0+7+0+1=16$,	médaille de bronze
Jean-François Martin :	$7+1+0+7+7+0=22$,	médaille d'argent
Rémi Varloot :	$7+0+0+7+0+0=14$,	mention honorable

Sur l'ensemble des 535 candidats, seuls deux chinois et un américain ont réussi l'exploit de réaliser un score parfait de 42 points.

Pour les trente premières places (jusqu'à la France), le classement par nations s'établit ainsi

Rang	Pays	Score	Rang	Pays	Score	Rang	Pays	Score
1	Chine	217	11	Japon	163	20	Allemagne	139
2	Russie	199	12	Vietnam	159	22	Canada	135
3	USA	190	13	Pologne	157	23	Royaume-Uni	133
4	Corée du Nord	188	14	Bulgarie	154	24	Italie	132
5	Iran	181	15	Ukraine	153	25	Kazakhstan	128
6	Thaïlande	175	16	Brésil	152	26	Biélorussie	125
7	Corée du Sud	173	17	Roumanie	141	27	Israël	120
8	Turquie	170	17	Pérou	141	28	Hong-Kong	107
9	Taiwan	168	19	Australie	140	29	Mongolie	106
10	Hongrie	165	20	Serbie	139	30	France	104

Pendant ce temps, la belle vie

Pendant les jours de coordination, diverses activités sont prévues pour les candidats, notamment des excursions pour visiter le pays d'accueil. Cette année, des visites de Ségovie, Madrid, Tolède et Aranjuez, ainsi qu'un spectacle de flamenco, ont été organisés afin de leur faire découvrir certains charmes de l'Espagne. En plus de cela, il est toujours possible de profiter des activités de temps libre déjà mentionnées, des fiestas du soir, concerts rock, ou d'autres rendez-vous, des compétitions sportives par exemple : doit-on mentionner un 6-0 en football infligé à l'équipe de France par l'équipe de Tunisie ? Heureusement, les français ont largement pris leur revanche mathématiquement. Pendant tout ce temps, séparés de leurs accompagnateurs préférés, les candidats sont surveillés par leurs guides respectifs. Certaines années, mais ce n'était le cas ni à Hanoï ni à Madrid, l'Olympiade met en place un système d'affichage qui permet d'informer les élèves de leurs résultats au fur et à mesure des coordinations. Á Madrid, le téléphone portable a souvent été utilisé...

Avant de deschampter

Après la coordination, les chefs de délégation, les adjoints et observateurs éventuels peuvent retrouver leurs élèves et les féliciter ou les réprimander, selon les cas. Ce moment est toujours attendu avec une certaine angoisse par les petits français, tant il est connu que les félicitations de Claude Deschamps sont bien plus rares que les engueulades. A Madrid, avant les épreuves, les candidats français cherchaient d'ailleurs désespérement une autre délégation susceptible d'accepter un échange de chambres, sournoisement prévu dans le but de perdre Claude Deschamps dans le dédale de couloirs et qu'ainsi il ne les retrouve jamais... Malgré tout, il ne faut pas trop s'inquiéter, les menaces sont rarement mises à exécution (pour l'instant, aucun élève n'est rentré à la nage ; et, depuis l'Espagne, il n'y avait de toute façon pas grand risque) et, à la rentrée prochaine, il n'y paraîtra plus. Cette année, à la surprise (voire l'inquiétude) de tous les habitués des O.I.M. présents, on a même vu Claude sourire une fois les scores définitivement établis. On parle même d'un film dans lequel il s'avourait « pas trop mécontent », mais c'est sans doute une légende...

C'est également à ce moment que les encadrants rendent aux élèves leurs copies et brouillons originaux (les annotations sont interdites à cause des coordinations). Il est alors facile de commenter les âneries, ou d'expliquer comment ils auraient pu éviter de perdre bêtement un point ici ou là. Finalement, les accompagnateurs remettent aussi à leurs candidats le fameux « diplôme »de participation à l'Olympiade.

Le sourire de Claude Deschamps

La cérémonie de clôture

Traditionnellement, le lendemain, a lieu la cérémonie de clôture qui, comme son nom l'indique, clôt officiellement l'Olympiade. Lors de cette cérémonie, outre quelques nouveaux discours d'importantes personnalités, on peut assister à la remise des médailles. Bien que le rythme soit assez rapide, cela prend encore un certain temps car cette année il y avait tout de même 238 médaillés. Notons que Juliette et Ambroise ont reçu leurs médailles de la main du Prince des Asturies, futur Roi d'Espagne. Ce fût aussi l'occasion de transmettre le drapeau des O.I.M. (dont le logo est apparu en 1995) au prochain pays hôte, l'Allemagne dans le cas présent. Après une nouvelle séance de photos, il est temps de se rendre au banquet final.

Les problèmes de l'Olympiade 2008

Le premier jour (16 juillet)

Problème 1. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit H son orthocentre. Le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[BC]$ coupe la droite (BC) en A_1 et A_2. De même, le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[CA]$ coupe la droite (CA) en B_1 et B_2, et le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[AB]$ coupe la droite (AB) en C_1 et C_2. Montrer que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont cocycliques.

Problème 2. (a) Montrer que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

pour tous nombres réels x, y, z différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$.

(b) Montrer qu'il existe une infinité de nombres rationnels x, y, z différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$ pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Problème 3. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tels que $n^2 + 1$ possède un diviseur premier strictement supérieur à $2n + \sqrt{2n}$.

Le deuxième jour (17 juillet)

Problème 4. Trouver toutes les fonctions f de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ telles que

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pour tous nombres réels strictement positifs w, x, y, z vérifiant $wx = yz$.

Problème 5. Soient n et k des entiers strictement positifs tels que $k \geqslant n$ et $k-n$ est pair. On suppose données $2n$ lampes numérotées de 1 à $2n$; chacune peut être *allumée* ou *éteinte*. Au début, toutes les lampes sont éteintes. Une *opération* consiste à allumer une lampe éteinte ou bien à éteindre une lampe allumée. On considère des séquences constituées d'opérations successives.

Soit N le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n+1$ à $2n$ sont éteintes. Soit M le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n+1$ à $2n$ sont éteintes, mais où les lampes de $n+1$ à $2n$ n'ont jamais été allumées.

Déterminer le rapport $\frac{N}{M}$.

Problème 6. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $BA \neq BC$. Les cercles inscrits dans les triangles ABC et ADC sont notés respectivement ω_1 et ω_2. On suppose qu'il existe un cercle ω qui est tangent à la demi-droite $[BA)$ au-delà de A, tangent à la demi-droite $[BC)$ au-delà de C, et qui est aussi tangent aux droites (AD) et (CD). Montrer que les tangentes communes extérieures à ω_1 et ω_2 se coupent en un point de ω.

Les solutions

Solution du problème 1. La solution qui suit est, mot pour mot, celle qui a rapporté sept points à Ambroise Marigot. Elle n'est sans doute pas la plus simple, mais elle a été très appréciée du jury. Par ailleurs, elle nécessite de savoir que le centre du cercle d'Euler est le milieu du segment d'extrémités H et le centre du cercle circonscrit (exercice laissé au lecteur).

Soient E et O les centres respectifs des cercles d'Euler et circonscrit à ABC ; ainsi que A', B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On note r le rayon du cercle d'Euler, et on pose $s = EO = EH$. On a alors

$$OA_1^2 = OA'^2 + A'A_1^2 = \overrightarrow{A'O}^2 + \overrightarrow{A'H}^2 = (\overrightarrow{A'E} + \overrightarrow{EO})^2 + (\overrightarrow{A'E} - \overrightarrow{EO})^2 = 2(r^2 + s^2).$$

On montre de même que les cinq autres points A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont à distance $\sqrt{2(r^2 + s^2)}$ de O. Donc les six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont cocycliques sur un cercle de centre O.

Remarque. Le cercle qui passe par les points $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ est connu comme étant *le second cercle de Droz-Farny* (mathématicien suisse, 1856 − 1912), et l'exercice cache en fait un résultat plus général : on rappelle que *le conjugué isogonal* d'un point P par rapport au triangle ABC est le point d'intersection des symétriques des droites (AP), (BP), (CP) par rapport aux bissectrices du triangle. Par exemple, on montre classiquement que les points O et H sont conjugués isogonaux par rapport à ABC, d'où on peut d'ailleurs déduire un certain nombre de propriétés remarquables de la droite d'Euler et du cercle des neufs points (le cercle d'Euler). Droz-Farny a alors démontré le résultat suivant :

Théorème 1 (Droz-Farny) *Soient P et Q deux points conjugués isogonaux par rapport au triangle ABC, et D, E, F les projetés orthogonaux de P sur (AB), (BC), (CA). Les cercles passant par Q et de centres respectifs D, E, F déterminent trois paires de points d'intersection avec (AB), (BC), (CA). Les six points ainsi définis appartiennent tous à un même cercle de centre P.*

De plus, si l'on échange les rôles de P et Q, on met alors en évidence un second cercle qui est de même rayon que le premier.

Solution du problème 2. (a) Si x, y, z sont des réels différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$, on pose

$$a = \frac{x}{x-1} \quad ; \quad b = \frac{y}{y-1}, \quad ; \quad c = \frac{z}{z-1}.$$

On vérifie qu'alors $a \neq 1$. Réciproquement, tout réel $a \neq 1$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $a = \frac{x}{x-1}$ où $x \neq 1$. En fait, on a même $x = \frac{a}{a-1}$. Il s'agit alors de prouver que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 1$ (1) sous la contrainte $a + b + c = 1 + ab + bc + ca$ et a, b, c dans $\mathbb{R} - \{1\}$. Or, pour de tels réels, on a

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= (a+b+c)^2 - 2(a+b+c) + 2 \\ &= (a+b+c-1)^2 + 1 \geqslant 1. \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Le changement de variables ci-dessus assure que si l'on trouve une infinité de triplets (a, b, c) tels que $a + b + c = 1 + ab + bc + ca$ (a, b, c dans $\mathbb{Q} - \{1\}$) et pour lesquels (1) est une égalité, cela nous donnera une infinité de triplets (x, y, z) de rationnels, tous différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$, pour lesquels l'inégalité du (a) est une inégalité. Nous oublions donc les x, y, z pour ne garder que les a, b, c. Nos calculs du (a) montrent qu'il y a égalité si et seulement si $a + b + c = 1$ et $ab + bc + ca = 0$. En éliminant c, il s'agit donc de trouver une infinité de rationnels différents de 1 tels que

$$a^2 + b^2 + ab + a + b = 0 \tag{2}$$

et $a + b \neq 0$. On note que la condition $a + b \neq 0$ qui traduit $c \neq 1$ est en fait une conséquence directe de (2) si l'on se restreint aux rationnels non tous les deux nuls, car $a^2 + b^2 + ab = \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}(a^2+b^2) \geqslant 0$. L'équation (2) peut être vue comme un trinôme du second degré en a dont le discriminant est $\Delta = (1-b)(3b+1)$. Il suffitalors de trouver une infinité de rationnels $b \notin \{0; 1\}$ tels que $1-b$ et $1+3b$ soient tous les deux des carrés de rationnels. Dans ce conditions, on aura a rationnel, qui sera différent de 1 si $b^2 + 2b + 2 \neq 0$, ce qui est toujours vrai. On pose $b = \frac{\alpha}{\beta}$ avec α et β entiers. Ainsi on veut $\beta - \alpha = p^2$ et $\beta + 3\alpha = q^2$ avec p et q entiers. On voit rapidement qu'il suffit de choisir $\alpha = m^2 - n^2$ et $\beta = m^2 + 3n^2$ où m et n sont des entiers arbitraires. N'ayant pas besoin de deux variables, on choisit même $n = 1$ et donc $b = \frac{m^2-1}{m^2+3} = 1 - \frac{4}{m^2+3}$. Ainsi, lorsque m décrit $\mathbb{N} - \{1\}$, le nombre b prend une infinité de valeurs rationnelles non nulles dans $[-\frac{1}{3}, 1[$ et Δ est toujours le carré d'un nombre rationnel, ce qui conclut.

Solution du problème 3. La principale difficulté de ce problème est sans doute d'inverser la recherche, en partant du nombre premier pour construire un n adéquat. Appelons *bon* tout nombre premier impair ayant la propriété suivante : il existe un entier $m \geqslant 2$ pair tel que p divise $m^2 + 1$ (cela revient à choisir $p \equiv 1 \pmod 4$, mais nous n'aurons pas besoin de le savoir).

Soit p un bon nombre premier. Parmi tous les entiers m possibles, on choisit le plus petit et on le note n. Si $n = pq + r$ est la division euclidienne de n par p, on a $n^2 + 1 \equiv r^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$, et la minimalité de n assure alors que $0 < n < p$. De plus, on a $(p-n)^2 + 1 \equiv n^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$, donc on a même $p > 2n$. Soit $k = p - 2n$. On a $k \geqslant 1$ et il s'agit d'obtenir $k > \sqrt{2n}$. Or $2n = p - k$ donc $4(n^2+1) \equiv k^2 + 4 \equiv 0 \pmod p$. Ainsi p divise $k^2 + 4$, et donc $k^2 + 4 \geqslant p$. On en déduit que $k \geqslant \sqrt{p-4} \geqslant \sqrt{2n-3}$, ce qui est presque l'objectif. Il s'agit donc de regarder de plus près nos minorations. Si $p \neq k^2 + 4$, on a en fait $k^2 + 4 \geqslant 2p$, et donc $k \geqslant \sqrt{4n-2} > \sqrt{2n}$ pour $n \geqslant 2$. On suppose donc que $p = k^2 + 4$. Il s'agit d'éviter que $2n - 3 \leqslant p - 4 \leqslant 2n$, ou encore que $k = p - 2n \in \{1, 2, 3, 4\}$. Or, puisque $p = k^2 + 4$, il convient donc d'éviter que $p = (p-2n)^2 + 4 \in \{5, 8, 13, 20\}$. Finalement, pour tout bon nombre premier $p \geqslant 23$, il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ et $p > 2n + \sqrt{2n}$.

Notons que si p et q sont deux bons nombres premiers distincts, ils ne peuvent être associés à un même n ayant les propriétés ci-dessus (puisqu'alors on aurait $n^2 + 1 \geqslant pq > (2n + \sqrt{2n})^2$, ce qui est absurde). Pour conclure, il suffit donc de prouver qu'il existe une infinité de bons nombres premiers p. Par l'absurde, supposons qu'il n'y en ait qu'un nombre fini. Appelons N le plus grand d'entre eux. Clairement, $p = 5$ est bon (même si on doit le rejeter d'après ci-dessus), et donc $N \geqslant 5$. Le nombre $(N!)^2 + 1$ est alors un entier impair, strictement supérieur à 1, qui admet donc un diviseur premier, disons p. Ce nombre p est donc bon. Or, par construction, tous les bons nombres premiers divisent $N!$ et doivent donc être premiers avec $(N!)^2 + 1$ ce qui signifie que p n'est pas bon et donne la contradiction attendue.

Remarque. Le résultat n'est clairement pas optimal. Si l'on sait qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $8k+1$ et que -1 est un résidu quadratique modulo p pour chacun de ces nombres premiers, en raffinant un peu la preuve ci-dessus, on peut prouver que l'on peut remplacer le $\sqrt{2n}$ par $\sqrt{10n}$. En considérant la décomposition en facteurs premiers de $\prod_{n=1}^{N}(n^2+1)$ et avec quelques résultats sur la distribution des nombres premiers de la forme $4k+1$, on peut prouver que son plus grand diviseur premier est au moins égal à $N\log(N)$. Cela conduit à une meilleure minoration de la forme $p > n\log(n)$. Beaucoup moins élémentairement, on peut encore améliorer la minoration jusqu'à $p > Cn^{\alpha}$ pour un certain $\alpha \in]1, 2[$ et une certaine constante $C > 0$.

Solution du problème 4. Soit f une solution éventuelle du problème. Pour tout réel $x > 0$, en choisissant $w = y = z = x$, il vient facilement $f(x^2) = f^2(x)$. En particulier, $f(1) = 1$ (car $f(1) \neq 0$). Pour tout réel $x > 0$, en choisissant $w = 1, y = z = \sqrt{x}$, il vient alors $\frac{1+f^2(x)}{2f(x)} = \frac{1+x^2}{2x}$, et donc $xf^2(x) + (x^2+1)f(x) + x = 0$. Cette dernière équation peut être vue comme une équation du second degré en $f(x)$ dont le discriminant est $\Delta = (x^2-1)^2$. Cela permet alors d'affirmer que, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$f(x) = x \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{1}{x}. \tag{3}$$

Il est facile de vérifier que les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sont effectivement des solutions du problème. Il reste à prouver qu'il n'y en a pas d'autre, en montrant qu'il n'y a pas d'hybride formée à partir de (3). Par l'absurde, supposons que la fonction f soit solution du problème et qu'il existe des réels a et b dans $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = \frac{1}{b}$. En utilisant l'équation fonctionelle initiale pour $w = a$, $x = b$, $y = ab$, $z = 1$, il vient directement

$$(a^2+b^2)(1+f^2(ab)) = a^4b^2 + 2a^2 + \frac{1}{b^2}. \tag{4}$$

Si $f(ab) = ab$, alors (4) s'écrit $a^2 + \frac{1}{b^2} = b^2 + a^2b^4$. On en déduit que $(1-b^4)(1+a^2b^2) = 0$, ce qui est impossible puisque $b > 0$ et $b \neq 1$. Si, au contraire, $f(ab) = \frac{1}{ab}$, alors (4) conduit cette fois à $\frac{1}{a^2} + b^2 = a^4b^2 + a^2$, puis à $(1-a^4)(1+a^2b^2) = 0$, pour aboutir à une contradiction analogue.

Solution du problème 5. La solution qui suit est, mot pour mot, celle qui a rapporté sept points à Jean-François Martin.

On part d'une certaine séquence qui comptera pour M. On prend maintenant une lampe fixée, de numéro $i \in \{1, ..., n\}$. Elle subit alors a_i opérations avec $a_i \equiv 1 \pmod 2$. On prend alors b de ces opérations, avec $b \equiv 0 \pmod 2$ et $0 \leqslant b \leqslant a_i$. On les fait subir à la lampe $n+i$, en lieu et place de la lampe i (au moment où la lampe i aurait dû les subir). Il y a alors $\binom{a_i}{b}$ possibilités de choisir ces b opérations. Si on prend tous les b, le nombre de possibilités sera alors de $\binom{a_i}{0} + \binom{a_i}{2} + \cdots + \binom{a_i}{a_i-1}$. Mais $\binom{a_i}{a_i-j} = \binom{a_i}{j}$. Donc

$$\begin{aligned}\binom{a_i}{0} + \binom{a_i}{2} + \cdots + \binom{a_i}{a_i-1} &= \frac{1}{2}\left(\binom{a_i}{0} + \binom{a_i}{1} + \cdots + \binom{a_i}{a_i}\right) \quad \text{car } a_i \equiv 1 \pmod 2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2^{a_i} = 2^{a_i-1}.\end{aligned}$$

Mais, en prenant tous les i, et en dénombrant tous les cas, il y a en tout

$$\prod_{i=1}^{n} 2^{a_i-1} = 2^{\sum_{i=1}^{n}(a_i-1)} = 2^{\sum_{i=1}^{n} a_i - n} = 2^{k-n}.$$

Mais, au lieu de se fixer à une séquence donnée comptant pour M, on peut faire tous ces changements sur toutes les séquences comptant pour M. Il y a alors $M \times 2^{k-n}$ séquences résultantes. Mais il est clair que cela donne toutes les séquences comptant pour N. Donc $N = M \times 2^{k-n}$, d'où $\frac{N}{M} = 2^{k-n}$.

Remarque. Comme mentionné ci-dessus, ce problème a été proposé par la France, créé par Ilia Smilga et Bruno Le Floch, tous deux anciens membres de l'équipe de France. Initialement, il s'agissait de calculer le nombre de certains chemins de longueur donnée reliant deux sommets opposés de l'hypercube en dimension k. Cet « habillage » n'ayant aucune chance d'être accepté pour les O.I.M., l'idée est ensuite venue d'introduire les interrupteurs.

Solution du problème 6. Pour faire bonne mesure, on commence par démontrer deux lemmes.

Lemme 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose qu'il existe un cercle ω inscrit dans l'angle $\widehat{ABC}$ et tangent aux droites (AD) et (CD). Alors $AB + AD = CB + CD$.

Démonstration. On note K, L, M, N les points de tangence respectifs de ω avec les droites (AB), (BC), (CD) et (DA) Alors $AB + AD = AB + AN - DN = BK - DN = BL - DM = CB + CM - DM = CB + CD$. $\square$

Lemme 2. On suppose que le cercle inscrit ω_1 dans le triangle ABC est tangent au côté $[AC]$ en P. Soient P' le point diamétralement opposé à P sur ω_1, et Q l'intersection des droites (BP') et (AC). Alors Q est le point de tangence du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{ABC}$ du triangle ABC avec le côté $[AC]$. De plus, on a $AP = CQ$.

Démonstration. On note respectivement A' et C' les points d'intersection de la tangente à ω_1 en P' avec les côtés $[BA]$ et $[BC]$. Alors ω_1 est le cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{A'BC'}$ du triangle $A'BC'$ et il rencontre le côté $[A'C']$ en P'. Les droites $(A'C')$ et (AC), toutes deux perpendiculaires à (PP'), sont donc parallèles. L'homothétie de centre B et de rapport $\frac{BQ}{BP'}$ transforme alors ω_1 en cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{ABC}$ du triangle ABC et transforme également P' en Q, ce qui assure que Q est le point de tangence du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{ABC}$ du triangle ABC avec le côté $[AC]$. D'autre part, si on note $2p$ le périmètre de ABC, il est facile de vérifier que $AP = p - AB$ et $CQ = p - AB$, d'où $AP = CQ$. Notons qu'il n'y a qu'un seul point de $[AC]$ dont la distance à C est égale à AP, ce qui permet d'identifier Q par cette relation. □

Revenons finalement au problème posé. Le cercle ω_1 rencontre $[AC]$ en P. Soit M le point de tangence de $[AC]$ avec ω_2. Alors $AP = \frac{1}{2}(AC + AB - BC)$ et $CM = \frac{1}{2}(AC + CD - AD)$. Or, d'après le lemme 1, on a $AB - BC = CD - AD$ donc $AP = CM$. Le lemme 2 permet alors d'affirmer que $M = Q$, et donc que ω_2 est tangent à $[AC]$ en Q, également point de tangence du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{ABC}$ du triangle ABC avec le côté $[AC]$. On prouve de même que P est le point de tangence du cercle exinscrit dans l'angle $\widehat{ADC}$ du triangle ADC avec le côté $[AC]$. De plus, on a $P \neq Q$ car $BA \neq BC$.

Soient $[PP']$ et $[QQ']$ les diamètres respectifs de ω_1 et ω_2, perpendiculaires à $[AC]$. D'après le lemme 2, les points B, P' et Q sont alignés, ainsi que les points D, Q' et P. Soit alors $[TT']$ le diamètre de ω qui est orthogonal à $[AC]$, où T est celle des deux extrémités qui est la plus proche de $[AC]$. L'homothétie de centre B et de rapport $\frac{BT}{BP'}$ transforme alors ω_1 en ω, et donc B, P' et T sont aussi alignés. De même, l'homothétie de centre D et de rapport $-\frac{DT}{DQ'}$ transforme ω_2 en ω, d'où on déduit l'alignement de D, Q' et T. Il s'ensuit que les points T, P' et Q sont alignés, ainsi que les points T, Q' et P. Mais, comme les droites (PP') et (QQ') sont parallèles, il existe une homothétie h qui transforme Q' en P et Q en P'. Elle transforme alors également ω_2 en ω_1. Or, puisque T est clairement du même côté de (PP') que Q et Q' le rapport de h est positif. Finalement, on a prouvé que le point T, qui appartient à ω, est le centre d'une homothétie de rapport positif qui transforme ω_2 en ω_1. Mais, il n'existe qu'un seul point ayant cette propriété et c'est justement le point d'intersection des tangentes communes extérieures à ω_1 et ω_2.