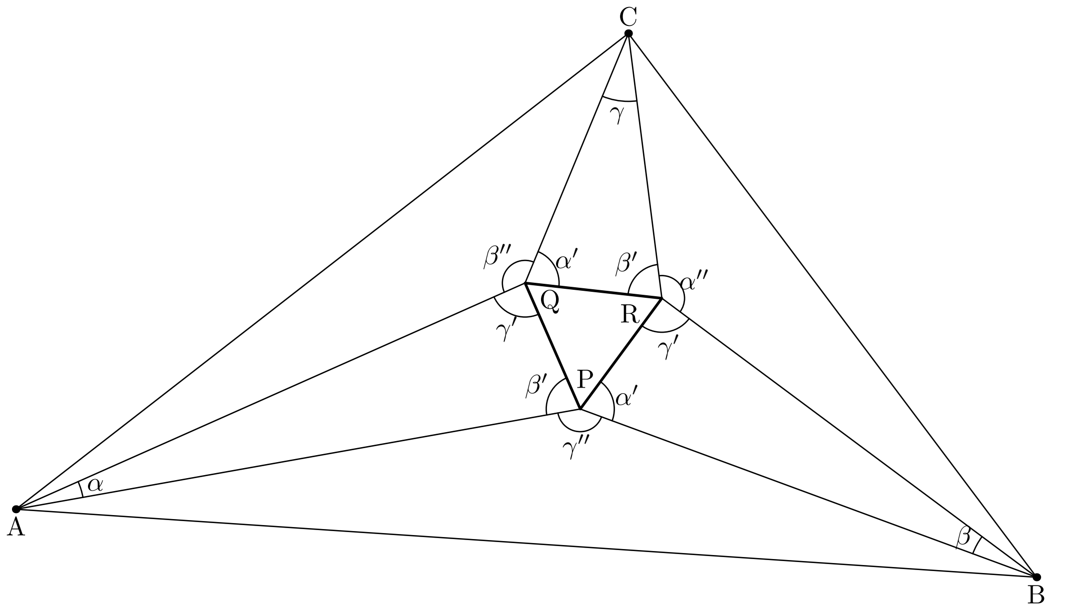
Une démonstration du théorème de Morley

Commençons par énoncer ce fameux théorème. Il dit que si l'on prend un triangle quelconque ABC et que l'on trace ses six trisectrices comme le montre la figure ci-dessous, les points d'intersection obtenus P, Q et R sont les sommets d'un triangle équilatéral.



Notre but maintenant est de donner une démontration relativement élégante de cet énoncé.

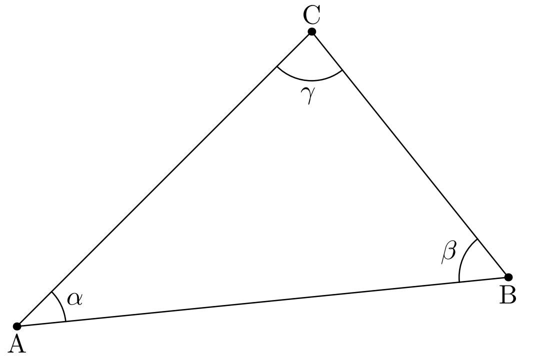
Commençons par faire un petit rappel. Il s'agit de l'encadré suivant :

Un petit rappel

Si ABC est un triangle quelconque, et α, β et γ la mesure de ses trois angles comme le montre la figure ci-contre, alors on a la relation :

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma}$$

On remarque également que l'on a un semblant de réciproque : si un triangle ABC est tel que l'angle en $\hat{C}$ vaut γ et $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\alpha}$ alors dans ce triangle, l'angle en $\hat{A}$ vaut α et celui en $\hat{B}$ vaut β.



La démonstration est désormais toute simple. Il s'agit en fait de prendre le problème à l'envers. On part d'un triangle équilatéral PQR et de trois réels positifs α, β, γ vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$. On pose maintenant $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{3}$, $\alpha'' = \alpha + \frac{2\pi}{3}$ et de même avec β et γ. On construit ensuite le point A en imposant $\widehat{AQP} = \gamma'$ et $\widehat{APQ} = \beta'$, l'angle $\widehat{QAP}$ vaut alors évidemment α. De même on construit B et C pour obtenir finalement le dessin de la première figure.

À ce moment, il s'agit de se convaincre que pour démontrer le théorème de Morley, il suffit par exemple de prouver que l'angle $\widehat{CAQ}$ vaut α. On utilise alors le rappel précédent qui assure que pour cela, il suffit de calculer le rapport suivant :

$$\frac{QC}{QA} = \frac{QC}{QR} \cdot \frac{QP}{QA} = \frac{\sin\beta'}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

ce qui conclut en remarquant que $\alpha + \beta'' + \gamma = \pi$.