Jeux de Nim

Le principe du jeu est le suivant. Le plateau de jeu se présente sous la forme d'un certain nombre de piquets plantés dans un morceau de bois. Ces piquets sont destinés à recevoir des petits anneaux. Au début de la partie, on met un certain nombre d'anneaux autour de chacun des piquets, pas forcément le même nombre pour chaque piquet. Chacun son tour, chacun des deux joueurs choisit un piquet et y retire le nombre d'anneaux qu'il souhaite. Le jeu se termine lorsque tous les anneaux ont été retirés, le gagnant étant celui qui a pris le dernier anneau.

Donnons un exemple. Supposons qu'il y ait quatre piquets et qu'au début de la partie, le premier piquet est entouré d'un unique anneau, le second de trois anneaux, le troisième de cinq et le quatrième de sept. Par la suite, on notera cette position par le quadruplet $(1, 3, 5, 7)$. C'est au premier joueur, disons Paul, de jouer. Il choisit le dernier piquet et décide d'y retirer trois anneaux de sorte que l'on arrive dans la position $(1, 3, 5, 4)$. Son adversaire, Pierre, enlève alors les trois anneaux du deuxième piquet. La position est $(1, 0, 5, 4)$. Paul prend alors trois anneaux autour du troisième piquet. La position est $(1, 0, 2, 4)$. Pierre réfléchit et retire un unique anneau du dernier piquet... on arrive dans la position $(1, 0, 2, 3)$. Paul se sent mal, il prend quand même l'anneau restant dans la premier piquet, ce à quoi Pierre répond en enlevant un anneau du dernier piquet. On arrive dans la position $(0, 0, 2, 2)$. Paul abandonne. *Vois-tu pourquoi ?*

Avant de commencer à étudier en détail ce jeu, fixons un peu de vocabulaire. Un *jeu de Nim à n piquets* sera un jeu de Nim dont le plateau de jeu comporte n piquets. Une position est dite *gagnante* si quand un certain joueur arrive dans celle-ci (et donc après avoir joué), il a une stratégie pour finir la partie et la gagner, c'est-à-dire que quelles que soient les réactions de son adversaire, il sait quoi faire pour gagner la partie. La position $(0, \dots, 0)$ est gagnante car un joueur qui arrive dans cette position a déjà gagné la partie. Si la position initiale d'une partie est gagnante, le deuxième joueur a une stratégie pour gagner. *Pourquoi ?*

Question 1 (Un peu de logique). *Montrer que si la position initiale d'une partie n'est pas gagnante, alors c'est le premier joueur qui a une stratégie pour gagner.*

Ceci prouve en particulier que si les joueurs savent bien jouer, l'issue de la partie est en fait simplement déterminée par la position initiale. C'est pourquoi, nous allons étudier les positions gagnantes.

Étude des positions gagnantes

Question 2. *Déterminer toutes les positions gagnantes pour un jeu de Nim à un seul piquet.*

Question 3. *Montrer qu'une position P est gagnante si et seulement si aucune des positions qui peuvent être atteintes à partir de P en un seul coup n'est gagnante.*

Plaçons-nous alors un instant dans le cas du jeu de Nim à deux piquets. La propriété énoncée dans la question précédente va nous permettre de déterminer facilement toutes les positions gagnantes.

En effet, représentons les positions par le tableau qui suit. Une gros point indique que la position en question est gagnante et une croix qu'elle me l'est pas. Une case non remplie bien entendu indique que l'on ne sait pas (encore) ce qu'il en est. Pour l'instant, on a :

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\bullet$						
1							
2							
3							
4							
5							
6							

On remarque que sur ce tableau les positions qui peuvent être atteintes en un coup à partir de la position P sont exactement celles qui se trouvent soit à gauche, soit en dessus de P. Ainsi la proposition de la question 3 peut se redire de la façon suivante : une case contient un point si et seulement si toutes les cases qui sont à sa gauche *et* toutes les cases qui sont au-dessus contiennent des croix. Cela implique en particulier que dès qu'une case contient un point, toutes les cases qui sont à sa droite et toutes les cases qui sont en-dessous doivent contenir une croix. Ainsi on peut déjà compléter le tableau de la façon suivante :

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
1	$\times$						
2	$\times$						
3	$\times$						
4	$\times$						
5	$\times$						
6	$\times$						

Regardons maintenant la case $(1,1)$. Les cases qui sont à sa gauche et les cases qui sont en dessus contiennent toutes des croix. Ainsi cette case doit contenir un point et on peut continuer la construction du tableau :

	0	1	2	3	4	5	6
0	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
1	$\times$	$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
2	$\times$	$\times$					
3	$\times$	$\times$					
4	$\times$	$\times$					
5	$\times$	$\times$					
6	$\times$	$\times$					

Question 4. *Montrer rigoureusement à l'aide d'une récurrence que les positions gagnantes sont exactement celles de la forme (n,n). Donner pour une telle position, la stratégie que doit suivre le deuxième joueur pour gagner. Donner pour une position qui n'est pas gagnante, la stratégie que doit suivre le premier joueur pour gagner.*

Question 5. *Regarder comment cette méthode se généralise pour des jeux de Nim à n piquets. Montrer que pour un jeu de Nim à quatre piquets, la position* $(1, 3, 5, 7)$ *est gagnante (et donc que Paul aurait pu abandonner la partie dès le début).*

Si tu es arrivé au bout de la question précédente, tu as dû pouvoir constater que cette méthode théorique n'est pas très facile à mettre en pratique. Nous nous proposons par la suite de donner une méthode de calcul plus simple pour déterminer si une position donnée est gagnante ou non.

Une loi bizarre sur les entiers naturels

Étant donnés deux entiers natuerls x et y, on définit l'entier $x\#y$ comme étant le plus petit entier qui ne se met ni sous la forme $x'\#y$ où x' est un entier naturel strictement plus petit que x, ni sous la forme $x\#y'$ où y' est un entier naturel strictement plus petit que y. Bon, c'est la définition... ça ne paraît vraiment pas simple ni pratique mais essayons quand même de faire des choses avec.

Calculons dans un premier temps $0\#0$. Il s'agit de regarder l'ensemble des entiers qui s'écrivent soit sous la forme $x'\#0$ avec $x' < 0$, soit sous la forme $0\#y'$ avec $y' < 0$. Mais des entiers naturels strictement négatifs, il n'y en a pas et donc quelle que soit la définition de $\#$, l'ensemble que l'on regarde est vide. Le plus petit entier qui n'appartient pas à cet ensemble est donc 0. On a donc calculé $0\#0 = 0$.

Voyons maintenant $0\#1$. L'ensemble à considérer est cette fois $\{0\#0\} = \{0\}$. Le plus petit entier n'étant pas dans cet ensemble est 1. On a donc $0\#1 = 1$. De même, on montre que $1\#0 = 1$.

Question 6. *Montrer par récurrence que pour tout entier x,* $x\#0 = 0\#x = x$.

Question 7. *Montrer que pour tous entiers x et y,* $x\#y = y\#x$.

Voyons désormais comment on peut présenter les calculs pour attraper $x\#y$ pour tous x et y de façon relativement simple. Ben encore sous forme de tableau. On a pour l'instant établi cela (bien entendu, l'entier qui est à l'intersection de la x-ième ligne et de la y-ième colonne est $x\#y$) :

#	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1						
2	2						
3	3						
4	4						
5	5						
6	6						

La définition dit exactement que l'entier qui doit être écrit dans la case de coordonnées (x, y) est le plus petit entier qui ne se situe pas dans une case à gauche de la case (x, y) ou dans une case au-dessus de la case (x, y). Ainsi, on a $1\#1 = 0$, puis $1\#2 = 3$, $1\#3 = 2$, etc.

Question 8. *Finir de remplir le tableau...*

On voit que cette construction ressemble en fait beaucoup à ce que l'on faisait tout à l'heure pour résoudre les jeux de Nim. En fait :

Question 9. *Montrer par récurrence que la position (x, y) est gagnante si et seulement si $x\#y = 0$.*

L'intêret de cette description est qu'elle s'adapte plus facilement pour les jeux de Nim à n piquets. Commençons par trois piquets. On définit la fonction f qui va associer un entier naturel à un triplet d'entiers naturels (qui va correspondre à la position dont on veut savoir si elle est gagnante ou pas) par la propriété suivante : étant donnés x, y et z trois entiers naturels, $f(x, y, z)$ est le plus petit entier naturel qui ne peut se mettre ni sous la forme $f(x', y, z)$ avec $x' < x$, ni sous la forme $f(x, y', z)$ avec $y' < y$, ni sous la forme $f(x, y, z')$ avec $z' < z$.

Question 10. *Montrer que la fonction f ainsi définie est unique et que la position (x, y, z) est gagnante si et seulement si $f(x, y, z) = 0$.*

Question 11. *Montrer que les fonctions $(x, y, z) \mapsto (x\#y)\#z$ et $(x, y, z) \mapsto x\#(y\#z)$ vérifient la propriété définissant f. En déduire que pour tous entiers naturels x, y et z :*

$$f(x, y, z) = (x\#y)\#z = x\#(y\#z)$$

Question 12. *Généraliser la construction précédente et montrer que la position $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un jeu de Nim à n piquets est gagnante si et seulement si $x_1\# \ldots \#x_n = 0$.*

Digression sur la base 2

Tu as sûrement déjà dû remarquer que par exemple :

$$1548 = 1 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 8 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

$$217 = 2 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 7 = 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

où $10^n = 10 \cdot \ldots \cdot 10$ (n fois) et où par convention $10^0 = 1$.

On peut représenter cette propriété par le tableau suivant :

	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
1548		1	5	4	8
217			2	1	7

Mais le choix de 10 est en fait totalement arbitraire, pourquoi n'a-t-on pas pris un autre nombre ? Sûrement parce que l'on a dix doigts mais il y a pas de raisons mathématiques. En effet, quelque soit le nombre entier $b > 1$, on peut décomposer tout nombre sur les puissances de b comme on vient de le faire avec 10 avec des chiffres qui sont des entiers compris entre 0 et $b - 1$. Nous allons regarder en détail le cas $b = 2$ et donc il n'y a que deux chiffres qui sont 0 et 1. Voyons ce que cela donne pour nos deux nombres :

	2^{11} 2048	2^{10} 1024	2^9 512	2^8 256	2^7 128	2^6 64	2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1
1548		1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0
217					1	1	0	1	1	0	0	1

Question 13. *Pourquoi est-ce vraiment cela ? Écrire la décomposition dans le tableau de* 483 *et* 3754.

Question 14. *Montrer que pour tout nombre entier x, il existe un unique n tel que $2^n \leqslant x < 2^{n+1}$. En déduire, grâce à une récurrence, que tout nombre se décompose dans le tableau précédent. Montrer qu'il s'y décompose de façon unique.*

Une façon plus économique de noter la décomposition est la suivante. Par exemple, on écrira $1548 = \overline{11000001100}$ et $217 = \overline{11011001}$. Ceci est *l'écriture en base* 2 des nombres 1548 et 217.

On remarque que l'addition et la multiplication se posent en base 2 comme on a l'habitude de la faire avec des nombres écrits en base 10, il y a juste moins de tables à apprendre. Une seule chose à laquelle il faut faire attention est que l'équivalent de $1 + 1 = 2$ en base 2 est $\overline{1} + \overline{1} = \overline{10}$ et donc lorsque l'on a à ajouter $\overline{1}$ et $\overline{1}$, il faut penser à poser $\overline{0}$ et à retenir $\overline{1}$.

Question 15. *Calculer en base* 2 *et en base* 10 *le produit de* 1548 *par* 217 *et vérifier que l'on trouve deux fois le même résultat.*

On peut faire une autre opération amusante, que l'on appelle souvent le *ou exclusif* sur les entiers en regardant leur écriture en base 2. Considérons x et y deux entiers naturels. À ces deux nombres, on associe l'entier $z = x \,\$\, y$ défini par : le n-ième chiffre (en partant de la droite) de z est 1 si et seulement si le n-ième chiffre (en partant par la droite) de x est 1 ou le n-ième chiffre (en partant par la droite) de y est 1 mais pas les deux. Une autre façon de dire cela est de dire que le n-ième chiffre (en partant par la droite) de z est 1 si et seulement si le n-ième chiffre (en partant par la droite) de x est différent du n-ième chiffre (en partant par la droite) de y. Par exemple, calculons $1548 \,\$\, 217$:

$$\begin{array}{lr} & 11000001100 \\ \$ & 11011001 \\ \hline & 11011010101 \end{array}$$

on obtient $1548 \,\$\, 217 = 1749$.

Question 16. *Montrer que pour tout entier naturel x, $0 \,\$\, x = x \,\$\, 0 = x$ et que $x \,\$\, x = 0$. Montrer que pour tous entiers naturels x et y, $x \,\$\, y = y \,\$\, x$. Montrer que pour tous entiers naturels x, y et z, $(x \,\$\, y) \,\$\, z = x \,\$\, (y \,\$\, z)$.*

Quand les lois bizarres se rencontrent

Je sais que tu vas être troublé mais en fait les deux lois étranges que l'on vient de définir sur les entiers naturels sont exactement les mêmes. Ce que je veux dire, c'est que pour tous les entiers x et y, on a $x\#y = x \,\$\, y$. Ceci fournit donc un moyen assez simple de calculer $x\#y$, ce qui permet de reconnaître les positions gagnantes de façon relativement simple. Mais essayons de voir pourquoi ce que je raconte est vrai.

En fait, pour voir cela, il suffit de démontrer que la loi $ vérifie la même propriété que celle qui définit la loi #. Autrement dit, il suffit de montrer que pour tous entiers naturels x et y,

$x \$ y$ est le plus petit entier qui ne peut se mettre ni sous la forme $x' \$ y$ avec $x' < x$, ni sous la forme $x \$ y'$ avec $y' < y$. Introduisons des notations. Appellons A_1 l'ensemble des entiers de la forme $x' \$ y$ pour $x' < x$ et A_2 l'ensemble des entiers de la forme $x \$ y'$ pour $y' < y$. Posons $A = A_1 \cup A_2$. Avec ces conventions, il s'agit de voir que le plus petit entier n'appartenant pas à A est $x \$ y$.

Question 17. *Montrer que si $x' \$ y = x \$ y$, alors $x' = x$. De même prouver que si $x \$ y' = x \$ y$, alors $y' = y$. En déduire que $x \$ y \notin A$.*

Question 18. *Soit a un entier naturel strictement plus petit que $x \$ y$. En regardant le premier chiffre qui est différent dans l'écriture en base 2 de $x \$ y$ et de a, montrer que l'on a soit $a \$ x < y$, soit $a \$ y < x$. En déduire que $a \in A$. Conclure.*

Question 19. *Retrouver de façon simple que la position $(1, 3, 5, 7)$ du jeu de Nim à quatre piquets est gagnante.*

Les jeux de Nim de dimension supérieure

On peut formuler différemment le jeu de Nim que nous venons d'étudier. Le plateau de jeu se présente alors comme une suite infinie de trous qui vont être amenés à recevoir des billes. Ces trous sont numérotés, ie il y a le premier, le deuxième, etc. et ces trous sont rangés de gauche à droite par ordre croissant. Au début de la partie, un certain nombre de trous (fini) contient des billes, les autres trous sont vides. Lorsqu'un joueur joue, il choisit un trou contenant une bille, enlève cette bille, choisit ensuite un autre trou plus à gauche et y dépose la bille qu'il vient de prendre si celui-ci est vide alors que si celui-ci est plein, il prend la bille qui est dedans et retire les deux billes qu'il a prises du jeu. Un joueur gagne quand son adversaire ne peut plus jouer (c'est-à-dire lorsqu'il ne reste plus de billes, ou qu'une seule bille dans le premier trou).

Question 20. *Expliquer pourquoi ce jeu est équivalent au jeu de Nim tel qu'on l'a décrit précédemment.*

L'intêret de cette présentation un peu moins visuelle est qu'elle se généralise en dimension supérieure de façon assez simple. Je vais juste présenter ici ce qu'il en est en dimension 2. Le jeu se joue toujours à deux. Le plateau de jeu est alors un quart de plan, disons le quart supérieur-droit, où il y a des trous à tous les points de coordonnées entières. Au début de la partie, certains de ces trous (un nombre fini) contiennent des billes, les autres sont vides. Lorsqu'un joueur joue, il choisit un trou contenant une bille, disons que c'est celui de coordonnée (x, y). Il enlève cette bille. Il choisit ensuite une case située à gauche et en dessous de la case dans laquelle il vient de prendre la bille. Si l'on note (x', y') les coordonnées de cette case, la condition de position se traduit par le fait que $x' < x$ et $y' < y$. Pour chacune des cases (x', y'), (x', y) et (x, y'), il inverse l'état de la case... autrement dit, il enlève la bille présente si la case était pleine ou en ajoute une si elle était vide. Un joueur gagne lorsque son adversaire ne peut plus jouer.

Question 21. *Montrer qu'une partie d'un tel jeu se termine nécessairement.*

Pour étudier ce nouveau jeu, il a été introduit une autre loi, @, sur les entiers naturels. Elle est définie de la façon suivante. Étant donnés deux entiers naturels x et y, $x@y$ est défini comme étant le plus petit entier naturel qui ne peut pas s'écrire sous la forme $(x'@y) \# (x'@y') \# (x@y')$ pour $x' < x$ et $y' < y$. Cette loi a des propriétés étonnantes. Notamment, elle est telle que $(\mathbb{N}, \#, @)$ est un corps de caractéristique 2 et même le plus petit corps de caractéristique 2 sur lequel tous les équations de degré 2 ont des solutions. Bon, je ne pense pas que cela te parle beaucoup mais je tenais à le dire...