Constructions à la règle courte et au compas à ouverture limitée

Xavier Caruso

Janvier 2008

Résumé

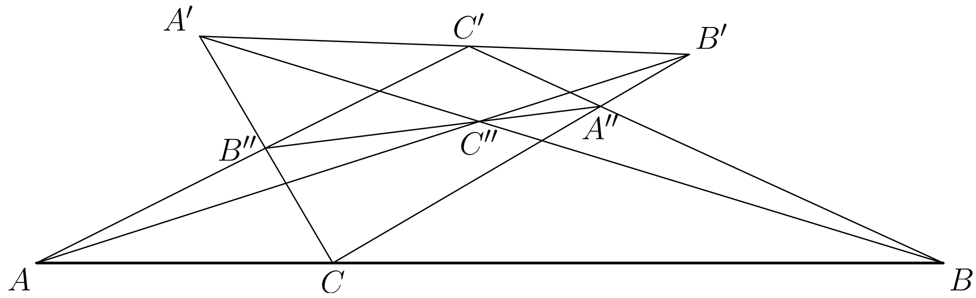
La théorie des constructions à la règle et au compas suppose toujours implicitement que l'on dispose d'instruments idéaux. En particulier, les règles sont infiniment longues (ou au moins aussi longues qu'on le souhaite) et les compas peuvent avoir une ouverture arbitrairement grande. Dans la pratique, évidemment, les instruments des écoliers ont des tailles bien définies. À partir de quelques constructions, nous montrons dans cette note que cela n'est pas un problème, du moins encore une fois théoriquement.

Mots-clés : géométrie élémentaire et projective, construction à la règle et au compas.

Avertissement Afin de pouvoir être compris par le plus grand nombre, nous avons choisi, pour cette note, de traiter le sujet de la façon la plus élémentaire possible même si parfois cela nous a conduit à un manque de rigueur et de précision (notamment, on verra apparaître des locutions comme « à peu près parallèle » ou « à peu près au milieu » dont le sens exact n'est pas clair *a priori*). Toutefois, pour satisfaire également ceux qui trouvent plus facilement leurs marques avec un formalisme précis, nous donnons en annexe la définition exacte d'un *point constructible à la règle courte* qui est utilisée dans ce texte. C'est bien entendu un très bon exercice — que l'on conseille au lecteur — que de s'inspirer de l'annexe pour écrire la définition d'une droite constructible à la règle courte ou d'un point constructible à la règle courte et au compas à ouverture limitée, puis de reformuler tous les résultats de cette note en ces termes formels.

1 La règle seule

Supposons que l'on ait à relier deux points A et B distants de 12 cm, mais que l'on ne dispose pour cela que d'une règle de 10cm (et bien sûr d'un crayon). Malgré les apparences, la construction est possible. Elle est illustrée par la figure suivante :



On commence par placer deux points A' et B' de façon à ce que le segment $[A'B']$ soit constructible avec notre instrument, et que celui-ci soit « à peu près » parallèle à la droite

(AB). On choisit également A' et B' de façon à ce que l'on puisse tracer les segments $[AB']$ et $[A'B]$. Ceux-ci se coupent en C''. Plaçons un point C' sur $[A'B']$ « à peu près » au milieu et traçons les segments $[AC']$ et $[BC']$. Traçons ensuite une droite passant par C'' et à nouveau « à peu près » parallèle à (AB). Elle coupe respectivement les segments $[A'C]$ et $[B'C]$ en B'' et A''. Finalement, soit C le point d'intersection de $(A'B'')$ et $(A''B')$.

Le théorème de Pappus assure que les points A, C et B sont alignés. Par ailleurs si les droites ont été choisies suffisamment parallèles et les points suffisamment voisins du milieu, on obtient une figure (qui ressemble à celle représentée ci-dessus) sur laquelle le point C est constructible avec notre règle trop courte, et en outre situé « à peu près » au milieu de $[AB]$. On peut alors relier les points A et B en passant par C.

Cependant, la construction précédente ne fonctionne pas directement si la règle est vraiment trop courte. Par exemple, si elle est plus courte que la moitié de la distance AB, il est clair que l'on ne pourra pas s'en sortir avec un unique point intermédiaire.

Toutefois, la construction demeure possible, mais est de plus en plus complexe au fur et à mesure que le rapport $\frac{AB}{\ell}$ (où ℓ est la longueur de la règle dont on dispose) augmente. Une façon efficace de démontrer cela est de remarquer que la méthode que nous avons présentée permet d'émuler une règle de 12 cm. Autrement dit, à partir de maintenant, on peut supposer que l'on dispose d'une telle règle. Mais alors, en appliquant une homothétie de rapport $\frac{12}{10}$ à tout ce qui précède, on est en mesure de relier des points distants de $\frac{12^2}{10}$ cm, et donc d'émuler une règle qui a cette longueur. La conclusion s'obtient en itérant l'argument.

Autrement dit, pour relier deux points A et B qui sont trop éloignés, on applique sans réfléchir la méthode que nous avons donnée, mais lorsque celle-ci demande de relier deux points qui sont encore trop éloignés pour notre petite règle, on applique à nouveau la méthode, et ce récursivement. Il est assez simple de faire un décompte pour s'assurer qu'au final le nombre de tracés auxiliaires que l'on devra utiliser varie en $(\frac{AB}{\ell})^\alpha$ où α est une constante.

On peut imaginer certaines ruses pour réduire la valeur de α. Par exemple, tel que nous l'avons présenté, le début de la construction demande de placer les points A', B' et C' et de tracer les segments $[AB']$, $[B'A']$ et $[A'B]$, ce qui nous amène déjà à recommencer trois fois la construction. À la place, on peut commencer par tracer une demi-droite issue de A et qui passe « presque » par B, une demi-droite issue de B qui passe « presque » par A et une sécante à ces deux demi-droites qui est « presque » parallèle à (AB). On notera que ces tracés ne demandent aucune itération de la méthode, puisque pour tracer une demi-droite issue d'un point P, il suffit de dessiner un petit segment issu de P puis de prolonger celui-ci aussi loin que nécessaire. De même, au lieu de choisir le point C' et de le relier successivement à A et B, on peut tracer à nouveau une demi-droite issue de A, appeler C' le point d'intersection de celle-ci avec $(A'B')$ et finalement n'avoir à relier que C' à B. Les points A'' et B'' s'obtiennent aussi sans avoir à itérer la construction. La suite, par contre, ne semble plus jouir de telles simplifications ; à la limite, on peut supposer que l'on a été suffisamment adroit dans le choix des droites pour que les points A' et B'' d'une part, et B' et A'' soient directement reliables. Au final, on arrive à $\alpha = \frac{3}{2} + \epsilon$ où $\epsilon > 0$ dépend de l'adresse (ou de la chance) que l'on a. Pour l'amusement du lecteur, nous avons représenté sur la figure 1 une illustration de ce qui vient d'être discuté lorsque $AB = 24$ cm et $\ell = 4$ cm. Pour faire ce dessin, il a fallu utiliser la mini-règle (représentée en bas à droite de la figure) plus de 200 fois. Ceci n'est certainement pas optimal mais donne une idée des ordres de grandeur qui apparaissent et montre qu'en pratique on risque d'avoir rapidement une erreur très importante[1].

2 La règle et le compas

Évidemment, si l'on ne dispose que d'un compas dont l'ouverture ne peut excéder 10cm, il va être difficile de tracer un cercle de rayon 12 cm, c'est certain. Toutefois, nous allons voir que si *un point* est constructible à la règle et au compas[2], alors il l'est aussi à la règle trop courte et au compas trop petit. D'après ce qui a été fait dans la première section, on peut simuler une règle arbitrairement longue à partir d'une règle de longueur fixée. On supposera donc dans la suite que seul le compas est soumis à limitation.

La méthode pour obtenir le résultat que l'on vient d'évoquer est en réalité fort simple. Elle consiste à choisir un point O quelconque dans le plan et à travailler sur une homothétie de la figure (de rapport suffisamment petit).

Plus précisément, supposons que l'on dispose d'une certaine figure d'origine formée d'un ensemble fini de points $M_1, \ldots, M_n$, et qu'à partir de ces points l'on puisse en construire un autre, disons M, qui s'obtient comme intersection de droites et de cercles. Pour construire M avec un compas limité, on commence par tracer les points $M'_1, \ldots, M'_n$ images de $M_1, \ldots, M_n$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{N}$. Pour tracer M'_i, on procède comme suit. On trace une droite quelconque passant par O sur laquelle on reporte N fois une longueur arbitraire (et suffisamment courte pour pouvoir utiliser le compas). Notons $A_1, \ldots, A_N$ les points obtenus. On trace le triangle OA_NM_i, puis on mène la parallèle à (A_NM_i) passant par A_1, simplement en reportant l'angle $\widehat{OA_NM_i}$ en A_1. D'après le théorème de Thalès, il est clair qu'elle coupe (OM_i) en M'_i.

Maintenant, si N est choisi suffisamment grand, les constructions qui permettent d'obtenir le point M à partir de M_i peuvent se faire avec notre matériel sur le modèle réduit. On aboutit comme ceci un point M' qui est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{N}$. Pour obtenir le point M, il ne reste alors plus qu'à reporter N fois la distance OM' sur la droite (OM').

3 Le compas seul

Supposons maintenant que l'on n'ait plus de règle, mais seulement un compas à ouverture bornée. Peut-on encore, avec cet unique instrument, construire tous les points que l'on peut obtenir avec un compas idéal ? La réponse est affirmative et la méthode est en fait la même que celle décrite dans la section précédente : on travaille sur un modèle réduit de la figure.

Il nous faut donc expliquer comment, avec pour seul outil un compas limité, on peut d'une part faire des homothéties de rapport $\frac{1}{N}$, et d'autre part reporter des longueurs (courtes) sur une droite, ou ce qui revient au même construire des symétriques par rapport à un centre. Le lemme suivant et sa démonstration donnent une réponse à cette dernière question :

Lemme 1. *Soient A et B dont la distance est inférieure à l'ouverture maximale de notre compas. Alors, on peut tracer le symétrique de B par rapport à A.*

[1] Pour vous en convaincre, je vous propose comme exercice de calculer l'épaisseur de crayon maximale pour que la déviation d'angle sur le segment $[AB]$ effectivement tracé n'excède pas quelques degrés.

[2] On entend par là que ce point peut s'obtenir comme intersection successive de droites et de cercles tracés à partir de points déjà construits. Voir [1] pour une étude détaillée du sujet.

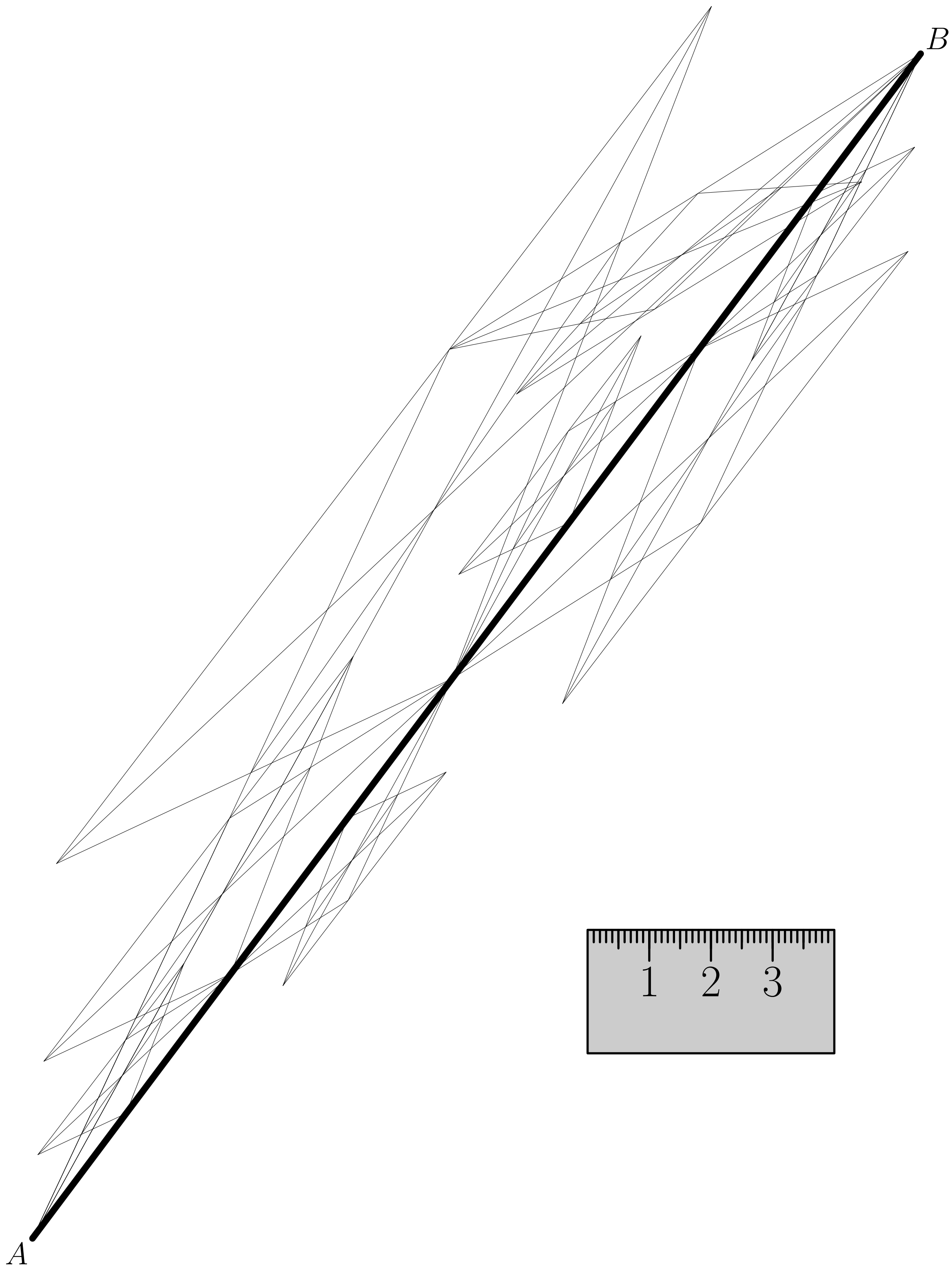
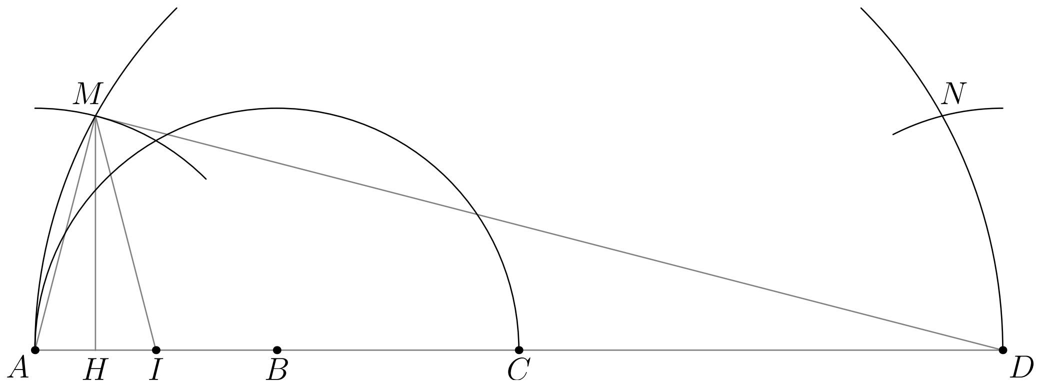


Fig. 1 – Comment relier deux points distants de 24 cm avec une règle de 4 cm

Démonstration. Voici la construction : on trace le cercle de centre A et de rayon AB, et on reporte à partir de B trois fois le rayon sur la circonférence du cercle. Il est classique que l'on obtient comme ceci le point diamétralement opposé. $\square$

Concentrons-nous à présent sur la première question, plus délicate. Nous allons nous limiter aux homothéties dont le rapport est l'inverse d'une puissance de 2 (c'est suffisant pour l'application qui nous intéresse, car on souhaite simplement que ledit rapport puisse être rendu arbitrairement petit). Par une récurrence immédiate, ceci nous amène à expliquer comment construire les milieux.

Rappelons pour commencer la construction « usuelle » des milieux au compas (idéal) seul. Soient A et B les extrémités du segment que l'on cherche à partager en deux. Pour ce faire, on commence par tracer le cercle de centre B passant par A, et le point C diamétralement opposé à A sur ce cercle. On trace ensuite le cercle de centre C passant par A, et on place sur celui-ci le point D diamétralement opposé à B. Soient M et N deux points du second cercle du même côté de (AB) tels que $AM = DN = AB$.



Si H est le projeté de M sur (AB), on a la relation $AM^2 = AH \cdot AD$ (puisque le triangle AMD est rectangle en M), d'où on déduit $AH = \frac{AB}{4}$. Si I désigne le milieu de $[AB]$ (point que l'on cherche à construire), on en déduit que le triangle MAI est isocèle en M. Autrement dit $MA = MI$. Un nouveau petit calcul que l'on laisse au lecteur permet d'accéder à la longueur MN : elle vaut $\frac{7}{2}AB$, et donc est égale à DI. Finalement I s'obtient comme la (bonne) intersection du cercle de centre M passant par A et du cercle de centre D et de rayon MN.

Nous venons en fait de prouver le lemme suivant :

Lemme 2. *Soient A et B deux points dont la distance est inférieure aux $\frac{2}{7}$ de l'ouverture maximale de notre compas. Alors, on peut tracer le milieu de $[AB]$.*

Corollaire 3. *Soient A et B deux points quelconques. On peut construire, avec un compas à ouverture bornée, le milieu de $[AB]$.*

Démonstration. Notons comme précédemment I le milieu de $[AB]$. Appelons ℓ l'ouverture maximale du compas. La preuve procède par récurrence en exhibant pour tout n une construction lorsque $AB < (\frac{3}{2})^n \cdot \frac{2}{7}\ell$. Lorsque $n = 0$, c'est exactement l'objet du lemme précédent.

Voici comment procéder pour passer de n à $n+1$. On choisit un point C situé « à peu près » au milieu de $[AB]$. Les longueurs AC et BC sont alors de l'ordre de $\frac{AB}{2}$, alors que CI est petite. Ainsi, si l'on n'est pas trop maladroit, on peut choisir les deux premières inférieures à $\frac{2}{3}AB$ et la troisième plus petite que ℓ. Ainsi la construction des milieux M

et N de $[AB]$ et $[AC]$ relève de l'hypothèse de récurrence, et est donc possible. Puisque $MN = \frac{AB}{2}$, on peut également construire le milieu J de $[MN]$. Le point I s'obtient alors comme le symétrique de C par rapport à J que l'on peut construire d'après le lemme 1. $\square$

Remarque. On pourrait rétorquer que si ℓ est petit, il ne semble pas si évident de choisir C tel que $CI < \ell$. En fait, ce n'est pas très important, car quitte à augmenter encore la complexité de la construction, on peut s'en sortir en remplaçant la condition « $CI < \ell$ » par exemple par « $CI < \frac{4}{3}AB$ ». En effet, dans cette situation, en appliquant l'hypothèse de récurrence, on peut diviser le segment $[CJ]$ en deux, puis encore en deux, et ainsi de suite jusqu'à obtenir des segments de longueur plus petite que ℓ. Il suffit alors de reporter ces segments le bon nombre de fois de l'autre côté de J.

Pour conclure, comme nous l'avons déjà dit, le lemme 1 et le corollaire 3 nous permettent d'appliquer l'argument développé dans la partie 2 à notre situation actuelle. Ainsi, tout point constructible au compas seul l'est aussi uniquement au compas à ouverture limitée.

4 Annexe : définition d'un point constructible à la règle courte

On commence par définir un *procédé de construction à partir de n points*. C'est une suite finie $(P_i)_{1 \leq i \leq N}$ de phrases formelles de la forme :

$$P_i \text{ : le point } A_{n+i} \text{ est l'intersection des droites } (A_{j(i)}A_{k(i)}) \text{ et } (A_{l(i)}A_{m(i)})$$

où les indices $j(i)$, $k(i)$, $l(i)$ et $m(i)$ sont des entiers inférieurs strictement à $n+i$. Si l'on ne comprend pas bien le sens de la formulation précédente, on peut tout aussi bien définir (P_i) comme un quadruplet d'éléments de l'ensemble $\{1, \dots, n+i-1\}$ (qui correspond bien entendu à la donnée de $(j(i), k(i), l(i), m(i))$). En ces termes, un procédé de construction à partir de n points n'est donc rien d'autre qu'une suite finie $(P_i)_{1 \leq i \leq N}$ de quadruplets d'entiers compris entre 1 et $n+i-1$. Dans tous les cas, appelons l'entier N le nombre d'*étapes* du procédé de construction.

Définition 1. Soit $(P_i)_{1 \leq i \leq N}$ un procédé de construction à partir de n points en N étapes. Soient également $A_1, \dots, A_n$ des points du plan et ℓ un réel strictement positif. On dit que (P_i) est *réalisable avec une règle de longueur ℓ à partir des points* $A_1, \dots, A_n$ s'il existe des points du plan $A_{n+1}, \dots, A_{n+N}$ (nécessairement uniquement déterminés) tels que pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$:

- les distances $A_{j(i)}A_{k(i)}$ et $A_{l(i)}A_{m(i)}$ sont strictement positives et inférieures ou égales à ℓ ;
- les droites $(A_{j(i)}A_{k(i)})$ et $(A_{l(i)}A_{m(i)})$ ne sont pas parallèles ;
- le point A_{n+i} est le point d'intersection de $(A_{j(i)}A_{k(i)})$ et $(A_{l(i)}A_{m(i)})$.

Le point A_{n+N} est alors appelé l'*aboutissement* de (P_i) à partir des points $A_1, \dots, A_n$.

On montre évidemment que si $\ell' > \ell$ et si (P_i) est réalisable avec une règle de longueur ℓ à partir des points $A_1, \dots, A_n$, alors il est réalisable avec une règle de longueur ℓ' à partir de ces mêmes points. En outre, si c'est le cas, l'aboutissement de (P_i) est le même pour ℓ et pour ℓ'. Ceci légitime le fait que ℓ n'apparaisse pas dans la définition d'aboutissement. On peut finalement énoncer la définition attendue :

Définition 2. Soient $A_1, \dots, A_s$ des points du plan et ℓ un réel strictement positif. On dit que le point B est *constructible à la règle de longueur ℓ* s'il existe un entier naturel t, des ouverts du plan $U_1, \dots, U_t$ et un procédé de construction (P_i) à partir de $s+t$ points tels que pour tout $(A'_1, \dots, A'_t) \in U_1 \times \cdots \times U_t$, (P_i) est réalisable avec une règle de longueur ℓ à partir des points $A_1, \dots, A_s, A'_1, \dots, A'_t$ et son aboutissement est B.

Références

[1] Carrega J.C., *Théorie des corps : la règle et le compas*, Hermann 2001