Autour de l'hypothèse du continu : construction de $\aleph_1$

Xavier Caruso*

Avril 2008

On ne retient souvent de la théorie des cardinaux que quelques questions classiques comme la dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ ou l'indénombrabilité de $\mathbb{R}$, le point culminant étant souvent la connaissance (plus ou moins précise) de l'hypothèse du continu (énoncée par Cantor), qui demande s'il existe une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est ni dénombrable, ni en bijection avec $\mathbb{R}$? La raison de la notoriété de cette dernière question est certainement liée à sa réponse plutôt inattendue puisque Gödel et Cohen ont montré son indécidabilité (*i.e.* dans un certain formalisme « naturel », on ne peut ni prouver ni infirmer l'existence d'un tel ensemble).

Malgré tout, des faits plus basiques sur les cardinaux semblent généralement moins connus, et même d'ailleurs ceux qui entretiennent un lien étroit avec la question de l'hypothèse du continu. Par exemple, le théorème suivant qui, accordez-le moi, répond à une question tout à fait connexe à celle de Cantor, ne semble pas avoir atteint le chemin de la célébrité (ni même, semble-t-il, de la culture standard du mathématicien).

Théorème 1. *Il existe un ensemble qui vérifie la propriété de Cantor : il est indénombrable et toutes ses parties indénombrables sont en bijection avec lui-même.*

C'est d'autant plus dommage que la démonstration du théorème 1 est, elle, élémentaire (elle ne fait essentiellement intervenir que la notion d'ordre) et par exemple accessible à un bon élève de première année des classes préparatoires. *Via* cette note, nous nous proposons d'entamer ce « décloisonnement » de la théorie des cardinaux en donnant une preuve du théorème 1.

Cette preuve est basée sur l'étude des bons ordres qui nous occupera pendant toute la première partie. Dans un second temps, nous prouverons le théorème 1 en construisant de façon explicite un ensemble qui convient. Nous conclurons finalement cette note avec un petit aparté sur l'axiome du choix à partir duquel nous déduirons que l'ensemble que nous avons construit a (en un sens à préciser) pour cardinalité le plus petit cardinal indénombrable.

La théorie esquissée dans cet article est généralement traitée dans les livres d'introduction à la théorie des ensembles, notamment dans les chapitres sur les *ordinaux* et les *cardinaux*. Toutefois, le point de vue qui y est adopté diffère légèrement de celui que nous donnons à cette note. Ici, nous nous bornons essentiellement à construire un ensemble satisfaisant la propriété de Cantor, alors que les références plus standard définissent de façon très générale dans un premier temps ce qu'est le cardinal d'un ensemble, puis dans un second temps des opérations sur ces cardinaux[1]. La contrepartie est que cette approche entraîne des complications ensemblistes qui peuvent, au moins dans un premier temps, effrayer le profane.

Nous renvoyons malgré tout à [1] pour une présentation agréable de la théorie générale.

1 Étude des bons ordres

Commençons par rappeler la définition : un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ est dit *bien ordonné* (ou un *bon ordre*) si toute partie non vide de E admet un plus petit élément. En particulier, un ensemble bien ordonné est toujours totalement ordonné puisque la paire $\{x, y\}$ admet par hypothèse un plus

*Chargé de recherche au CNRS affecté à l'université de Rennes 1

[1] La construction que nous présentons ici revient à celle du *cardinal successeur*.

petit élément ; si celui-ci est x, on a $x \leqslant y$, sinon c'est y et on a $x \geqslant y$. Maintenant, si $(E, \leqslant)$ est un ensemble (totalement) ordonné, définissons un *segment initial* de E comme une partie A telle que :

$$(\forall x \in A)\,(\forall y \in E) \quad (y \leqslant x) \Rightarrow (y \in A).$$

Lemme 2. *Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble* bien *ordonné. Soit A un segment initial de E. Alors on a l'alternative :*

- *soit $A = E$;*
- *soit il existe $x \in E$ tel que $A = \{y \in E \,/\, y < x\}$.*

Démonstration. Si $A \neq E$, on définit x comme le plus petit élément de $E \backslash A$. Il est alors clair que $\{y \in E,\, y < x\} \subset A$. Réciproquement aucun $y \geqslant x$ ne peut appartenir à A, car cela impliquerait que x lui-même est élément de A, ce qui est supposé faux. Le lemme est démontré. □

Dans la suite, toutes les relations d'ordre seront notées $\leqslant$ et nous nous autoriserons à écrire simplement E à la place de $(E, \leqslant)$ pour désigner un ensemble ordonné.

Définition 3. Soient E et F deux ensembles bien ordonnés. On dit que $E \leqslant F$ s'il existe une bijection croissante entre E et un segment initial de F

Il est clair que la « relation » $\leqslant$ qui vient d'être définie est réflexive et transitive ; on dit que c'est un *préordre*. On a également une sorte d'anti-symétrie. Pour l'établir, on commence par le lemme suivant :

Lemme 4. *Soient E un ensemble bien ordonné et $f : E \to E$ une application strictement croissante. Alors $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que la conclusion ne soit pas valable et considérons x le plus petit contre-exemple, *i.e.* le plus petit élément de E tel que $f(x) < x$. Alors $f(x)$ n'est pas un contre-exemple, d'où $f(f(x)) \geqslant f(x)$. Mais par ailleurs, par stricte croissance de f, l'inégalité $f(x) < x$ implique $f(f(x)) < f(x)$. On a donc une contradiction. □

Proposition 5. *Soient E et F deux ensembles bien ordonnés. On suppose $E \leqslant F$ et $F \leqslant E$. Alors il existe une bijection croissante entre E et F.*

Démonstration. Notons $f : E \to F$ et $g : F \to E$ les applications données par les hypothèses $E \leqslant F$ et $F \leqslant E$. Posons $h = g \circ f$; c'est une bijection croissante entre E et un de ses segments initiaux, noté A. Par le lemme précédent, $h(x) \geqslant x$ pour tout $x \in E$, ce qui démontre d'une part que $A = E$, et d'autre part en utilisant le fait que h est bijective que $h = \mathrm{id}_E$. De même $f \circ g = \mathrm{id}_F$, d'où on déduit que f et g sont des applications inverses l'une de l'autre. Ainsi il existe bien une bijection croissante entre E et F (c'est f). □

Proposition 6. *Soient E et F deux ensembles bien ordonnés. On a alors $E \leqslant F$ ou $F \leqslant E$.*

Démonstration. Définissions X comme l'ensemble des parties de $E \times F$ qui sont le graphe d'une bijection croissante entre un segment initial de E et un segment initial de F. En raisonnant par l'absurde comme dans la preuve du lemme 4, on montre que si $f' : E' \to F'$ et $f'' : E'' \to F''$ sont deux bijections croissantes entre des segments initiaux de E et F, alors f' et f'' coïncident sur $E' \cap E''$. Il s'ensuit que la réunion de tous les éléments de X est encore le graphe d'une fonction $f : E' \to F'$ où E' (resp. F') est un segment initial de E (resp. de F). Nous voulons montrer que $E' = E$ ou $F' = F$. Si ce n'était pas le cas, il existerait x dans E et y dans F tels que :

$$E' = \{x' \in E \,/\, x' < x\} \quad \text{et} \quad F' = \{y' \in F \,/\, y' < y\}.$$

Mais alors, on peut prolonger f en posant $f(x) = y$, obtenant ainsi une nouvelle bijection croissante entre segments initiaux. Celle-ci est par définition dans X, ce qui entraîne que son graphe est inclus dans G. Or, ceci est manifestement faux puisque f n'était pas défini en x. □

2 Construction de $\aleph_1$

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des couples $(E, \leqslant)$ où E est une partie de $\mathbb{N}$ et $\leqslant$ un bon ordre sur E (qui n'a *a priori* aucun rapport avec l'ordre usuel sur les entiers naturels). On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{B}$ en décrétant que E et E' sont équivalents s'il existe une bijection croissante entre E et E' (on note alors $E \sim E'$). Soit $\aleph_1$ le quotient de $\mathcal{B}$ par cette relation d'équivalence[2] ; dans la suite on notera $[E] \in \aleph_1$ la classe d'équivalence d'un bon ordre $E \in \mathcal{B}$.

On vérifie directement que si $E \sim E'$ et $F \sim F'$ alors $E \leqslant F$ si, et seulement si $E' \leqslant F'$. Ceci montre que la relation de préordre $\leqslant$ définie sur $\mathcal{B}$ passe au quotient pour définir une nouvelle relation de préordre sur $\aleph_1$. La proposition 5 montre que c'est même une relation d'ordre alors que la proposition 6 assure qu'elle est totale.

Lemme 7. *Soit $E \in \mathcal{B}$. L'application :*

$$\begin{array}{rcl} E & \to & \{F \in \aleph_1 \,/\, F < [E]\} \\ x & \mapsto & [\{y \in E \,/\, y < x\}] \end{array}$$

est une bijection croissante.

Démonstration. C'est une conséquence directe des définitions. □

Proposition 8. *L'ordre $\leqslant$ défini sur $\aleph_1$ est un bon ordre.*

Démonstration. Soit X une partie non vide de $\aleph_1$. On veut montrer que X admet un plus petit élément. Soit pour cela $[E]$ dans X un élément quelconque. Si c'est le plus petit élément de X, il n'y a rien à faire. Sinon, considérons Y l'ensemble des éléments de $\aleph_1$ strictement inférieurs à $[E]$. Par le lemme 7, Y est en bijection croissante avec E. Il en résulte qu'il est bien ordonné et donc que $X \cap Y$ (qui est non vide) admet un plus petit élément. La proposition en résulte. □

Proposition 9. *1. Tout segment initial strict de $\aleph_1$ est dénombrable.*

2. $\aleph_1$ n'est pas dénombrable

Démonstration. Le premier point est une conséquence directe des lemmes 2 et 7. Pour la seconde assertion, on raisonne par l'absurde. Si $\aleph_1$ était dénombrable, il existerait une partie E dans $\mathbb{N}$ en bijection avec $\aleph_1$. En transportant le bon ordre de $\aleph_1$ sur E, on fait de E un élément de $\mathcal{B}$. Soit Y l'ensemble des éléments de $\aleph_1$ strictement plus petits que $[E]$. Le lemme 7 donne une bijection croissante $f : E \to Y$. Comme par ailleurs E est en bijection croissante avec $\aleph_1$, on en déduit une bijection croissante de $\aleph_1$ dans un de ses segments initiaux stricts. Mais ceci est impossible par le lemme 4. □

Nous pouvons à présent achever la démonstration du théorème 1. Bien entendu, nous montrons pour cela qu'un ensemble qui satisfait la propriété de Cantor est $\aleph_1$. Soit X une partie indénombrable de $\aleph_1$; il s'agit de prouver qu'il existe une bijection entre X et $\aleph_1$. L'ordre $\leqslant$ sur $\aleph_1$ définit par restriction un bon ordre sur X. D'après la proposition 6, on a $X \leqslant \aleph_1$ ou $\aleph_1 \leqslant X$. On traite les deux cas séparément.

[2]Le lecteur est peut-être plus habitué à croire que $\aleph_1$ est un objet un peu mystérieux appelé cardinal, mais qui ne représente pas une vraie entité mathématique. En réalité, il n'est en rien et la théorie des ensembles définit le cardinal d'un ensemble X comme le plus petit (au sens de ce que nous avons expliqué dans la première partie) ensemble bien ordonné[3] en bijection avec X. Par exemple, le cardinal d'un ensemble infini dénombrable est $\mathbb{N}$ (muni de l'ordre usuel), également noté $\aleph_0$ dans ce contexte. Comme nous allons le voir par la suite, le $\aleph_1$ que l'on définit ici correspond bien au plus petit cardinal indénombrable.

[3]Pour être complet, on montre qu'il existe un représentant canonique de ce bon ordre (et c'est bien sûr celui que l'on choisit pour la définition du cardinal en question) : c'est l'unique qui contient les éléments de ses éléments et pour lequel la relation d'ordre strict est donnée par l'appartenance. Dans ce texte, nous trichons donc un peu car le représentant que nous construisons n'est pas exactement celui-ci... mais peu importe.

Si $X \leqslant \aleph_1$, on a par définition une bijection entre X et un segment initial de $\aleph_1$. La première partie de la proposition 9 montre que ce segment initial ne peut être strict puisque X est supposé indénombrable. Ainsi, c'est $\aleph_1$ et X est bien en bijection avec $\aleph_1$.

Si $\aleph_1 \leqslant X$, on a, au contraire, une bijection croissante $f : \aleph_1 \to Y$ où Y est un segment initial de X. Comme précédemment, on veut montrer que $Y = X$. Si ce n'était pas le cas, il existerait $x \in X$ tel que $Y = \{y \in X \,/\, y < x\}$. Ainsi, f fournirait une application strictement croissante $\aleph_1 \to \aleph_1$ dont l'image est strictement majorée par x (on rappelle que Y est un sous-ensemble de $\aleph_1$). Ceci entre en contradiction avec le lemme 4 : le théorème est démontré.

3 Le plus petit cardinal indénombrable

Une légère modification (que nous laissons au lecteur) de l'argument que nous venons de présenter permet d'aboutir à la variante suivante du théorème 1.

Théorème 10. *Soit X un ensemble bien ordonné indénombrable. Alors il existe une injection (croissante) $X \to \aleph_1$.*

Cet énoncé dit en substance que $\aleph_1$ est le plus petit ensemble indénombrable *parmi les ensembles sur lesquels on peut mettre un bon ordre*. Cette dernière restriction n'est pas très satisfaisante. On peut toutefois s'en passer grâce à l'axiome du choix, ou plus exactement à l'une de ses formulations équivalentes que voici :

Théorème 11 (Zermelo)**.** *Tout ensemble admet une relation de bon ordre.*

Signalons pour conclure que tout ce qui précède n'a en fait pas grand chose à voir avec l'opposition dénombrable/indénombrable : la construction de $\aleph_1$ peut se faire en remplaçant $\mathbb{N}$ par un ensemble X quelconque et fournit alors le plus petit (ensemble de) cardinal strictement supérieur à celui de X. Plus précisément, on a le théorème suivant dont la démonstration (laissée au lecteur) consiste essentiellement à recopier ce qui a été fait précédemment.

Théorème 12. *Soit X un ensemble. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des bons ordres définis sur une partie de X et Y le quotient de $\mathcal{B}$ par la relation d'équivalence : $E \sim F$ si, et seulement s'il existe une bijection croissante de E dans F. Alors pour tout ensemble Z, il existe soit une injection de Z dans X, soit une injection de Y dans Z.*

Références

[1] Paul R. Helmos, *Introduction à la théorie des ensembles*, deuxième édition, Mouton/Gauthier-Villars, Paris, 1970