Rapport à quatre ans de X. Caruso

Période : décembre 2006 — décembre 2010

A – Rapport d'activité

A.1 Curriculum vitæ

Xavier Caruso
(né le 24 avril 1980 à Cannes)
IRMAR – Université Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex
Tél : 02 23 23 58 92
E-Mail : `xavier.caruso@normalesup.org`
Page web : `http://perso.univ-rennes1.fr/xavier.caruso/`
Marié, sans enfant

Parcours scolaire et professionnel

2009–2010 Mobilité d'une année au laboratoire Poncelet à l'Université Indépendante de Moscou

2006– Chargé de recherche au CNRS affecté à l'Université de Rennes 1.

2005 Thèse sous la direction de Christophe Breuil intitulée *Conjecture de l'inertie modérée de Serre* et soutenue le 7 décembre devant le jury composé de Ahmed Abbes, Pierre Berthelot (rapporteur), Lawrence Breen, Christophe Breuil (directeur de thèse), Michel Raynaud. Autre rapporteur : Mark Kisin.

1999–2003 Élève de l'École normale supérieure de Paris

Enseignement

2010 Cours de 12h intitulé « Field of p-adic numbers and extensions » (niveau Master) à l'Université Indépendante de Moscou

2009 Cours de 12h intitulé « Aspects algébriques de la théorie de Hodge p-adique » (niveau Doctorat) à l'Université de Rennes 1

2008– Encadrement, en cotutelle avec David Lubicz, de la thèse de Jérémy Le Borgne

2008 Encadrement du stage de M2 de Jérémy Le Borgne

2007–2009 Interventions ponctuelles à la préparation à l'agrégation à l'Université de Rennes 1.

2003–2006 Moniteur à l'Université Paris 13.

2000– Animation de stages de préparation aux olympiades internationales de mathématiques.

Diffusion de la connaissance

2009 Réalisation avec Jos Leys d'un film de 30 minutes intitulé « Mais où est donc le petit côté ? »

2009– Participation régulière au Festival des Sciences de Rennes Métropole.

2009– Billetiste pour le site *Images des Mathématiques*

2004– Participation régulière à la Fête de la Science à Paris puis à Rennes

2004– Écriture d'un quinzaine d'articles dans la *Revue de Mathématiques Spéciales* et la revue *Quadrature*

Responsabilités

2011– Co-organisateur du séminaire *Mathematic Park* à l'IHP.

2010 Organisateur de la conférence *Arithmétique et algorithmique* à Moscou.

2010– Co-organisateur des *journées Louis-Antoine* à l'Université de Rennes 1

2009–2013 Coordinateur du projet ANR *Calculs effectifs en théorie de Hodge p-adique (CETHop)*

2006–2009 Organisateur du séminaire interne des équipes de géométrie à l'université de Rennes 1.

2004–2006 Organisateur du séminaire des doctorants de l'Université Paris 13.

2003–2006 Organisateur d'un groupe de travail pour brillants lycéens et élèves de prépa à l'ENS de Paris.

Divers

1997 Premier accessit au concours général de mathématiques.
Quatrième accessit au concours général de physique.
Participation aux olympiades internationales de mathématiques à Mar del Plata (Argentine). Obtention d'une *honourable mention*.

Langues : français (langue maternelle), anglais, assez bonne connaissance du russe

Loisirs : promenades, jeux de réflexion.

A.2 RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Le thème directeur de mon activité de recherche de ces quatre dernières années a été l'étude des représentations du groupe de Galois d'un corps p-adique à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ ou encore $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. La théorie de Hodge p-adique, introduite par Fontaine dans les années 1970 et développée ensuite par de nombreux autres mathématiciens, fournit des outils intéressants pour mener à bien cette étude.

Personnellement, je me suis intéressé plus particulièrement aux aspects entiers et de torsion de la théorie (c'est-à-dire aux représentations à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ ou $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$), dont l'étude n'a véritablement pris son essor qu'à la fin des années 1990 avec les travaux de Breuil. Voici, résumées de façon concise, les contributions que j'ai apportées à ce domaine durant ces quatre dernières années :

1. une étude approfondie de la structure des catégories introduites par Breuil dans le cas de grande ramification ;
2. (avec David Savitt) une borne pour l'action de l'inertie modérée sur les quotients de réseaux dans une représentation semi-stable ;
3. (avec Tong Liu) une borne pour l'action de l'inertie sauvage sur les quotients de réseaux dans une représentation semi-stable ;
4. le développement d'une classification des représentations galoisiennes p-adiques en termes de (ϕ, τ)-modules de laquelle il suit :

– une caractérisation des représentations semi-stables en termes de représentations de $E(u)$-hauteur finie, et
– une classification des représentations semi-stables en termes de (φ, N_∇)-modules à la Kisin.

Un ingrédient essentiel, pour l'obtention des résultats précédents, est la récente théorie de Kisin, développée dans [34] et [33]. Dans la première référence, Kisin définit en outre un certain nombre de variétés (que Pappas et Rapoport ont ensuite nommées *variétés de Kisin*) et les utilise dans le but de démontrer des théorèmes de modularité. Une autre de mes contributions, réalisée au cours de ces quatre dernières années, a été :

5. l'estimation de la dimension de certaines variétés de Kisin, et l'obtention d'une formule conjecturale pour un estimé de la dimension dans le cas général.

Dans une (longue) première partie de ce rapport, j'aimerais expliquer de façon plus précise les résultats que j'ai obtenus et qui ont été cités précédemment. Je donnerai ensuite quelques indications et impressions au sujet de la mobilité d'un an au laboratoire Poncelet à Moscou dont j'ai bénéficié entre début octobre 2009 et fin septembre 2010.

Mais, avant d'en arriver là, il me faut commencer par donner quelques éléments de contexte mathématique, et notamment par rappeler la teneur des théories de Breuil et de Kisin sur lesquelles se base l'essentiel de mes travaux.

2.1 Quelques éléments de contexte

Soit K un corps complet pour une valuation discrète, dont le corps résiduel k est supposé parfait de caractéristique $p > 0$. On note $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k ; son corps des fractions K_0 s'injecte canoniquement dans K, et l'extension résultante K/K_0 est finie et totalement ramifiée. Son degré, noté e dans la suite de ce texte, est appelé l'*indice de ramification absolu* de K. À partir de maintenant, la locution *représentation galoisienne p-adique* fera référence à une $\mathbb{Q}_p$-représentation de dimension finie du groupe de Galois $G_K = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ (où $\bar{K}$ désigne une clôture algébrique de K fixée). De telles représentations s'obtiennent naturellement comme la cohomologie étale de variétés algébriques sur $\mathbb{Q}_p$, et les mathématiciens se sont rapidement rendus compte qu'elles encodaient un grand nombre d'informations de nature arithmétique sur la variété. C'est pour cette raison que les représentations galoisiennes p-adiques ont commencé à être étudiées pour elles-mêmes. Une contribution très importante dans cette direction, a été la mise au point par Fontaine de la théorie de Hodge p-adique, dont l'objet est, d'une part, de sélectionner, parmi toutes les représentations galoisiennes p-adiques, celles qui sont susceptibles d'apparaître comme la cohomologie étale de variétés et, d'autre part, de décrire celles-ci. C'est ainsi que sont nées les notions de représentations *cristallines*, *semi-stables* et de *de Rham* (cette hiérarchie correspond à différentes hypothèses de réduction portant sur la variété dont on calcule la cohomologie) et de ϕ-modules filtrés (dans le cas des représentations cristallines) et (ϕ, N)-modules filtrés (dans le cas des représentations semi-stables).

Après cela, le besoin s'est fait également sentir de comprendre les réseaux à l'intérieur des représentations galoisiennes p-adiques, ainsi que les quotients de deux d'entre eux. Typiquement, dans le cas des représentations cristallines, un des objectifs était de dégager des structures vivant au même niveau que les ϕ-modules filtrés qui classifieraient les réseaux et les quotients précédemment évoqués. Une première étape dans cette direction a été accomplie par Fontaine et Laffaille. Toutefois, elle avait le défaut d'être restreinte aux corps K non absolument ramifiés (*i.e.* pour lesquels $e = 1$) et aux représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans $\{0, 1, \dots, p-2\}$. À la fin des années 1990, Breuil a introduit de nouveaux modules filtrés et montré que ceux-ci permettaient de généraliser les résultats de Fontaine et Laffaille au cas semi-stable. Quelques années après, la théorie de Breuil a elle-même été étendue d'abord par moi-même dans ma thèse, puis par Liu dans [36]. L'ensemble de ces résultats, basé sur les idées de Breuil, constitue la base et le point de départ d'une grande partie de la recherche que j'ai effectuée durant ces quatre dernières années ; je vais donc devoir m'y attarder un peu afin de pouvoir être capable par la suite de présenter mes résultats de façon suffisamment précise.

2.1.1 La théorie de Breuil

On note σ le morphisme de Frobenius agissant sur les anneaux k, W et K_0. On fixe π une uniformisante de K, dont on appelle $E(u)$ son polynôme minimal sur K_0. C'est un polynôme d'Eisenstein de degré e. On se donne également un entier r compris, au sens large, entre 0 et $p-2$. Soit S le complété (pour la topologie

p-adique) de l'enveloppe à puissances divisées de $W[u]$ relativement à l'idéal principal engendré par $E(u)$ et compatibles aux puissances divisées canoniques sur $pW[u]$; il est muni de la filtration à puissances divisées notée $\mathrm{Fil}^t S$, d'un Frobenius $\phi : S \to S$ défini comme l'unique morphisme d'anneaux σ-semi-linéaire, continu tel que $\phi(u) = u^p$, et d'un opérateur de monodromie $N : S \to S$ défini par $s \mapsto -u\frac{ds}{du}$. Pour tout entier n, on pose $S_n = S/p^n S$. À partir de ces données, Breuil définit, dans [26], la catégorie $\mathrm{Mod}_{/S}^{r,\phi,N}$ (resp. $\mathrm{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$) dont un objet est la donnée de :

- un S-module $\mathcal{M}$ libre (resp. isomorphe à une somme directe finie de S_{n_i} pour certains entiers n_i) ;
- un sous-module $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ contenant $\mathrm{Fil}^r S\, \mathcal{M}$;
- un opérateur ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ (appelé Frobenius) vérifiant

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r}\, \phi_r(s)\phi_r(E(u)^r x)$$

  pour tous $s \in \mathrm{Fil}^r S$ et $x \in \mathcal{M}$;
- un opérateur (dit de monodromie) $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant :
  - (condition de Leibniz) $N(sx) = N(s)x + sN(x)$ pour tout $s \in S$ et $x \in \mathcal{M}$;
  - (transversalité de Griffith) $E(u)N(\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$;
  - le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\
\mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Les morphismes dans $\mathrm{Mod}_{/S}^{r,\phi,N}$ et $\mathrm{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$ sont simplement les applications S-linéaires commutant à toutes les structures supplémentaires. Le lien avec les représentations galoisiennes se fait simplement grâce à un foncteur T_{st}. Il est défini par la formule

$$\begin{array}{rcll}
T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) & = & \mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil}^r,\phi_r,N}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\mathrm{st}}) & \text{si } \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{/S}^{r,\phi,N} \\
T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) & = & \mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil}^r,\phi_r,N}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \text{si } \mathcal{M} \in \mathrm{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}
\end{array}$$

où la notation « $\mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil}^r,\phi_r,N}$ » signifie que l'on considère les applications S-linéaires compatibles Fil^r, ϕ_r et N et où $\hat{A}_{\mathrm{st}}$ désigne un certain anneau de période (muni d'une filtration, d'opérateurs ϕ_r et N, et d'une action de G_K) que je ne souhaite pas décrire ici. Le théorème qui suit résume les résultats évoqués dans l'introduction.

Théorème 1. *Le foncteur T_{st} défini sur $\mathrm{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi}$ réalise une équivalence de catégories entre cette catégorie et celle des réseaux à l'intérieur des représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate dans $\{0, \dots, r\}$.*

On suppose $er < p - 1$. Alors la catégorie $\mathrm{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$ est abélienne. Le foncteur T_{st} défini sur $\mathrm{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$ est pleinement fidèle et son image essentielle est stable par quotients et sous-objets.

Lorsque $e = 1$, le théorème précédent est dû à Breuil (voir [26]). Suivant les mêmes techniques, je l'ai étendu lors de ma thèse au cas $er < p - 1$ (voir [28]). Enfin, les cas restants ont été démontrés par Liu (voir [36]) et utilisent des méthodes différentes basées sur la théorie que Kisin venait juste de développer à l'époque.

2.1.2 La théorie de Kisin

La théorie de Kisin qui vient d'être évoquée a également joué un rôle déterminant dans ma propre recherche. Avant de présenter mes propres travaux, il me faut donc encore en présenter les grandes lignes. C'est l'objet de ce paragraphe.

Soit $(\pi_s)_{s \geqslant 0}$ un système compatible de racines p^s-ième de l'uniformisante π, considérée précédemment. Pour tout entier s, on pose $K_s = K(\pi_s)$ et $G_s = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_s) \subset G_K$. On définit également $K_\infty = \bigcup_{s \geqslant 0} K_s$ et $G_\infty = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_\infty) = \bigcap_{s \geqslant 0} G_s$. La théorie de Kisin trouve son origine dans les deux remarques suivantes dûes à Breuil :

– si $\mathcal{M}$ est un objet de $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S}$ ou $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$, alors la restriction de la représentation $T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ au sous-groupe G_∞ ne dépend pas de l'opérateur N ; plus précisément on a un isomorphisme G_∞-équivariant

$$T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil}^r,\phi_r}(\mathcal{M}, A_{\mathrm{cris}})$$

où A_{cris} est l'anneau de période de Fontaine et est vu comme une S-algèbre en envoyant u sur le représentant de Teichmüller de $\underline{\pi} = (\pi_s) \in \varprojlim_{\mathrm{Frob}} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$;

– par la théorie du corps de normes de Fontaine et Wintenberger, le groupe G_∞ est isomorphe au groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(k((u))^{\mathrm{sep}}/k((u)))$, d'où il suit que ses $\mathbb{Z}_p$-représentations de type fini sont classifiées par des φ-modules étales sur l'anneau

$$\mathcal{E}^{\mathrm{int}} = \Big\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i u^i \ \Big| \ a_i \in W,\ \lim_{i\to-\infty} a_i = 0 \Big\},$$

c'est-à-dire des modules de type fini M sur $\mathcal{E}^{\mathrm{int}}$ munis d'un endomorphisme $\phi : M \to M$ semi-linéaire par rapport à $\phi : \mathcal{E}^{\mathrm{int}} \to \mathcal{E}^{\mathrm{int}}$, $\sum a_i u^i \mapsto \sum \sigma(a_i) u^{pi}$, et dont l'image engendre M.

Se posait alors la question de trouver un lien direct (*i.e.* ne faisant pas intervenir les représentations de G_∞) entre les φ-modules étales sur $\mathcal{E}^{\mathrm{int}}$ et les objets des catégories $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S}$ et $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S_\infty}$, définies respectivement comme $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S}$ et $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$ en oubliant la donnée de l'opérateur de monodromie. La première réponse fut proposée par Breuil dans le cas des objets de $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S_\infty}$ annulées par p. Il a, pour cela, introduit une nouvelle catégorie $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_1}$ de ϕ-modules sur l'anneau $\mathfrak{S}_1 = k[[u]]$. Un objet de $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_1}$ est, par définition, un module libre $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{S}_1$ muni d'un endomorphisme $\phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ semi-linéaire par rapport au Frobenius, dont l'image engendre un $\mathfrak{S}_1$-module contenant $E(u)^r\mathfrak{M} = u^{er}\mathfrak{M}$. À un objet de $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_1}$, il est possible d'associer, d'une part, un φ-module étale annulé par p sur $\mathcal{E}^{\mathrm{int}}$ (simplement en tensorisant par $k((u))$) et, d'autre part, un objet $\mathcal{M}$ de $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S_\infty}$ défini comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= S_1 \otimes_{\phi,\mathfrak{S}_1} \mathfrak{M} \quad (\text{où } S_1 = S/pS) \\ \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} &= (\mathrm{id}\otimes\phi)^{-1}(\mathrm{Fil}^r S_1 \otimes_{\mathfrak{S}_1} \mathfrak{M}) \\ \phi_r &= (\phi_r \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id}\otimes\phi). \end{aligned}$$

Breuil a également démontré que le foncteur $\mathfrak{M} \mapsto \mathcal{M}$ définit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_1}$ et $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S_1}$. De plus, la catégorie $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_1}$ est équipée d'un foncteur $T_{\mathfrak{S}}$ vers la catégorie des représentations de G_∞, définie en associant à $\mathfrak{M}$ la représentation correspondante au ϕ-module étale $\mathcal{E}^{\mathrm{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$. De plus, un autre théorème, encore dû à Breuil, affirme qu'en tant que représentations de G_∞, on a une identification canonique entre $T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ et $T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M})$.

Le souhait d'étendre ces résultats aux objets de $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S}$ et $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S_\infty}$ conduit à poser $\mathfrak{S} = W[[u]]$ et à introduire une nouvelle catégorie $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}}$ (resp. $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_\infty}$) dont un objet est la donnée d'un $\mathfrak{S}$-module $\mathfrak{M}$ libre de type fini (resp. de type fini, annulé par une puissance de p et sans u-torsion[1]) muni d'un endomorphisme $\phi : M \to M$ semi-linéaire par rapport à $\phi : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$, $\sum a_i u^i \mapsto \sum \sigma(a_i) u^{pi}$ et dont l'image engendre sur $\mathfrak{S}$ un module contenant $E(u)^r\mathfrak{M}$. Ces nouvelles catégories possèdent l'avantage remarquable de pouvoir être définies pour tout entier r, et même pour $r = \infty$ en posant $\mathrm{Mod}^{\infty,\phi}_{/\mathfrak{S}} = \bigcup_{r\geqslant 0} \mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}}$.

L'objet de la théorie de Kisin est non pas de comparer entre elles les catégories $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}}$ et $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S}$ ou $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_\infty}$ et $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S_\infty}$ comme cela était fait précédemment, mais plutôt de mettre en relation les objets de $\mathrm{Mod}^{\infty,\phi}_{/\mathfrak{S}}$ avec les représentations cristallines ou semi-stables, en passant par un nouveau chemin, celui des (ϕ, N_∇)-modules. En ce qui concerne la définition de ces modules, je renvoie le lecteur à l'article de Kisin [34] et me contente, pour ce texte de dire que Kisin construit une équivalence de catégories $\mathcal{K}$ entre la catégorie $\mathrm{Rep}^{\mathrm{st}}_{[0,+\infty[}(G_K)$ des représentation semi-stables de G_K à poids de Hodge-Tate positifs ou nuls et la catégorie $\mathrm{Mod}^{\infty,\phi,N_\nabla,0}_{/\mathcal{O}}$ des (ϕ, N_∇)-modules de pente nulle. Utilisant ensuite des résultats de Kedlaya, il démontre l'existence d'un foncteur $\mathcal{R}_\phi : \mathrm{Mod}^{\infty,\phi,N_\nabla,0}_{/\mathcal{O}} \to \mathrm{Mod}^{\infty,\phi}_{/\mathfrak{S}} \otimes \mathbb{Q}_p$ (où la notation « $\otimes\mathbb{Q}_p$ » désigne

[1] Sous cette forme, ces conditions ont été dégagées par Liu dans [35].

la catégorie à isogénie près) qui s'insère dans la diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}^{\mathrm{st}}_{[0,+\infty[}(G_K) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, "\mathcal{K}"', "\sim"] & \mathrm{Rep}(G_\infty) \\ \mathrm{Mod}^{\infty,\phi,N_\nabla,0}_{/\mathcal{O}} \arrow[r, "\mathcal{R}_\phi"] & \mathrm{Mod}^{\infty,\phi}_{/\mathfrak{S}} \otimes \mathbb{Q}_p \arrow[u, "\mathcal{T}_\phi"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

dans lequel $\mathrm{Rep}(G_\infty)$ désigne la catégorie des $\mathbb{Q}_p$-représentations de G_∞, le foncteur res est simplement la restriction de l'action galoisienne à G_∞ et, enfin, le foncteur $\mathcal{T}_\phi$ est déduit de l'équivalence entre représentations de G_∞ et ϕ-modules étales sur $\mathcal{E}^{\mathrm{int}}$. La théorie de Kisin dit aussi quelque chose lorsque l'on revient à un niveau r fini : une représentation semi-stable V est à poids de Hodge-Tate dans $\{0,\dots,r\}$ si, et seulement si $\mathcal{R}_\phi \circ \mathcal{K}(V)$ est un objet de $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}} \otimes \mathbb{Q}_p$.

Par définition, l'image essentielle $\mathcal{T}_\phi$ est notée $\mathrm{Rep}^{E(u)}_{[0,+\infty[}(G_\infty)$ et les représentations de G_K dont la restriction à G_∞ appartient à cette sous-catégorie sont dites *de $E(u)$-hauteur finie*. De même, on dit qu'une représentation de G_K est de $E(u)$-hauteur $\leqslant r$ si sa restriction à G_∞ est dans la sous-catégorie $\mathcal{T}_\phi(\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}} \otimes \mathbb{Q}_p)$. Il résulte de ce que l'on vient de dire que toute représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate positifs ou nuls est de $E(u)$-hauteur finie, et même plus précisément qu'une représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate dans $\{0,\dots,r\}$ est de $E(u)$-hauteur $\leqslant r$.

2.2 Les catégories de Breuil en grande ramification

Faisant naturellement suite à mon travail de thèse, j'ai commencé par m'interroger à mon entrée au CNRS sur une extension possible du deuxième alinéa du théorème 1 au cas où $er \geqslant p-1$. En réalité, on savait déjà depuis longtemps qu'aussi bien le caractère abélien des catégories $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$ que la pleine fidélité du foncteur T_{st} était mise en défaut dès que $er \geqslant p-1$. Il était donc nécessaire de faire émerger une nouvelle structure.

La mise en place de la théorie sous forme conjecturale Je commençais mon investigation par examiner un contre-exemple classique aux deux propriétés précédentes, que j'aimerais répéter ci-après pour mieux illustrer ma démarche. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ les deux objets de $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$ (on suppose $er \geqslant p-1$) définis par les formules suivantes :

$$\mathcal{M} = S_1, \quad \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} = \mathcal{M}, \quad \phi_r(1) = 1, \quad N(1) = 0,$$

$$\mathcal{M}' = S_1, \quad \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}' = u^{p-1}\mathcal{M}', \quad \phi_r(u^{p-1}) = 1, \quad N(1) = 0,$$

et soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ l'application S-linéaire donnée par $f(1) = u^p$. On vérifie directement que f est compatible à toutes les structures supplémentaires, et est donc un morphisme de $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$. Clairement, il n'est pas bijectif, mais pourtant on peut montrer que c'est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme, ce qui ne saurait arriver dans une catégorie abélienne. Par ailleurs, un autre petit calcul assure que $T_{\mathrm{st}}(f)$ est, lui, un isomorphisme, ce qui met en défaut la pleine fidélité de T_{st}.

M'appuyant sur cet exemple, ainsi que de plusieurs autres qui se sont tous avérés du même acabit, j'en suis arrivé à penser qu'en identifiant formellement tous les objets de $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$ s'envoyant sur la même représentation galoisienne *via* le foncteur T_{st}, on devrait trouver une catégorie abélienne sur laquelle T_{st} définit un foncteur pleinement fidèle. Pour avancer dans cette direction, il fallait donc que j'étudie la structure des fibres du foncteur T_{st}. Reprenant les exemples précédents, je me suis rendu compte que la situation semblait identique à celle que Raynaud avait décrite lors de son étude des prolongements sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de schémas en groupes donnés sur la fibre générique ; plus précisément, j'émettais alors la conjecture suivante qui avait toutes les caractéristiques d'une étape importante pour la résolution de mon problème.

Conjecture 2. *L'ensemble des préimages par T_{st} d'une représentation T fixée est naturellement un ensemble partiellement ordonné, admettant un élément maximal et un élément minimal (se correspondant par dualité).*

Toutefois, en dehors des exemples que j'avais déjà traités (et d'une réponse complète en rang 1), je butais longtemps sur ce problème. Par contre, pendant le même temps, les conséquences de la conjecture 2 m'apparaissaient de plus en plus clairement. En effet, je commençais par remarquer que, tenant pour vrai la conjecture, il était possible de définir un foncteur Max : $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty} \to \mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$, en associant à un objet $\mathcal{M}$ l'élément maximal de sa fibre. L'image essentielle de Max, notée $\mathrm{Max}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$ est alors à la fois une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$ et un de ses quotients (qui se réalise par l'intermédiaire du foncteur Max). De plus, la restriction de T_{st} à $\mathrm{Max}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$ permet de factoriser $T_{\mathrm{st}} : \mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty} \to \mathrm{Rep}(G_K)$ par le foncteur Max. De façon visuelle, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Max}^{r,\phi,N}_{/S_\infty} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "T_{\mathrm{st}}"'] & & \mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty} \arrow[ll, bend right, "\mathrm{Max}"'] \arrow[dl, "T_{\mathrm{st}}"] \\
& \mathrm{Rep}(G_K) &
\end{tikzcd}$$

Toujours supposant la conjecture 2, je démontrais aussi le théorème suivant qui donnait une réponse satisfaisante au problème que je me posais.

Théorème 3. *Sous la conjecture 2, la catégorie* $\mathrm{Max}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$ *est abélienne et le foncteur* $T_{\mathrm{st}} : \mathrm{Max}^{r,\phi,N}_{/S_\infty} \to \mathrm{Rep}(G_K)$ *est pleinement fidèle.*

Le passage par la théorie de Kisin À ce niveau, il ne restait finalement qu'à démontrer la conjecture 2. C'est à peu près à ce moment de ma réflexion que j'ai commencé à étudier sérieurement la théorie de Kisin (qui a été sommairement présentée précédemment). Je me suis alors rapidement rendu compte que la conjecture 2 se transposait dans la situation de Kisin et conduisait alors à un nouvel énoncé que j'arrivais à démontrer sans trop d'efforts. Établir le lien conjecturé par Breuil entre les catégories $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S_\infty}$ et $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_\infty}$ redevenait ainsi une question essentielle. Par chance, Liu m'avait fait savoir quelque temps auparavant qu'il avait des idées au sujet de cette question. Nous avons donc conjugué nos connaissances et finalement démontré, dans un article en collaboration l'équivalent du théorème 3 pour la catégorie $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_\infty}$ (voir [10]). À ce niveau, le travail n'était pas achevé car il fallait encore passer de $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_\infty}$ à $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/\mathfrak{S}_\infty}$, ce que j'ai finalement fait dans une seconde publication (voir [5]) dans le cas des représentations annulées par p. Il ne faut pratiquement aucun doute que le résultat s'étende à toute la catégorie $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$ mais, malgré tout, cela reste encore à établir rigoureusement (un certain nombre de nouvelles difficultés liées au caractère non-noethérien de l'anneau S apparaîssent alors).

Lors de notre travail avec Liu, nous avons par ailleurs remarqué qu'il était possible de décrire un quasi-inverse à gauche du foncteur $T_{\mathfrak{S}} : \mathrm{Max}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_\infty} \to \mathrm{Rep}(G_\infty)$ par une formule explicite. Pour compléter mon article [5], je cherchais donc à obtenir une formule analogue dans le cas des objets annulés par p de $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$. Toutefois, dans cette nouvelle situation, cela s'est avéré nettement plus compliqué car l'analogue strict de la formule que nous avions obtenue avec Liu conduisait à un objet ne satisfaisant par du tout les axiomes de la définition de $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$. En fait, il fallait comprendre que cette formule brute n'était qu'une première étape et que, pour obtenir finalement un objet de $\mathrm{Mod}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$, il était nécessaire d'appliquer encore plusieurs transformations. La formule finale est un peu compliquée pour être écrite dans ce rapport et c'est la raison pour laquelle je me contente de renvoyer au corollaire 3.5.5 de [5] pour un énoncé plus précis. Un des intérêts de ce résultat est de permettre de remonter au niveau des objets $\mathcal{M}$ tués par p de $\mathrm{Max}^{r,\phi,N}_{/S_\infty}$ des structures supplémentaires que l'on aurait sur la représentation $T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ (typiquement une action supplémentaire d'un groupe, un produit scalaire, une forme symplectique, *etc.*) et donc d'enrichir, à moindre frais, la théorie de Breuil pour étudier de nouvelles classes de représentations galoisiennes.

À propos de cet enrichissement, les exemples basiques consistent à ajouter des coefficients (*i.e.* on considère des représentations définis non plus sur $\mathbb{F}_p$, mais sur une de ses extensions finies) ou des données de descente (*i.e.* on considère des représentations de G_K qui se prolongent à un groupe G_L où L est un sous-corps de K d'indice fini). Ces deux situations sont étudiées, en guise d'illustration, dans mon article [5] : je démontre, toujours dans le cas annulé par p, des équivalents de la conjecture 2 et du théorème 3.

Quelques applications Durant la préparation de mon article, je participais en parallèle à un groupe de travail sur les généralisations de la conjecture de modularité de Serre organisé par Breuil, Henniart, Mézart et

Ollivier. Le thème de mon exposé était une proposition de l'article [31] de Gee (qui n'était à l'époque qu'une prépublication), qui mettait en parallèle par un calcul en théorie de Breuil deux types de $\mathbb{F}_p$-représentations de G_K. J'étudiais donc la preuve de Gee, mais me suis rendu malheureusement rapidement compte que les calculs présentés étaient faux. C'est en essayant de réparer l'erreur que je me suis aperçu petit à petit que la théorie présentée ci-dessus (que j'étais alors en train de développer) me guidait sereinement dans cette voie. Ainsi, je parvenais à proposer en quelques jours un erratum à l'article de Gee, qui a fait l'objet d'une prépublication (voir [4]). Aujourd'hui, reprenant les arguments de mon erratum, Gee a corrigé sa démonstration fautive, et l'article est publié ainsi.

Par ailleurs, Florian Herzig m'a fait récemment savoir qu'il préparait avec Emerton et Gee un article (à nouveau à propos de questions de modularité) dans lequel les auteurs étaient amenés à utiliser les résultats de mon article [5].

2.3 Deux bornes pour l'action de l'inertie

Le but de la théorie de Hodge p-adique de torsion (et en particulier les théories de Breuil et Kisin décrites précédemment) étant de décrire les quotients de réseaux dans une représentation cristalline ou semi-stable, on peut se permettre d'attendre qu'elle soit capable de caractériser les représentations de torsion qui s'écrivent ainsi (avec éventuellement des contraintes supplémentaires — portant typiquement sur les poids de Hodge-Tate — sur la représentation cristalline ou semi-stable en question). Malheureusement, une telle question semble encore très difficile à attaquer aujourd'hui. Ce que l'on sait faire toutefois en utilisant la théorie de Hodge p-adique, c'est obtenir des conditions nécessaires que doivent vérifier les quotients de réseaux dans une représentation semi-stable[2] à poids de Hodge-Tate dans $\{0, \ldots, r\}$. Par exemple, dans le cas $r < p - 1$, en utilisant que celles-ci sont dans l'image essentielle de T_{st}, j'avais démontré dans ma thèse que les poids de l'inertie modérée de la semi-simplifiée d'une représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate dans $\{0, \ldots, r\}$ sont inférieurs ou égaux à er.

Pendant ces quatre dernières années, j'ai également poursuivi mes investigations dans cette direction en démontrant deux nouveaux résultats (en collaboration avec David Savitt d'une part, et Liu d'autre part) que j'aimerais détailler ci-dessous. Le premier, qui s'inscrit dans la continuité directe de ma thèse, concerne à nouveau les poids l'inertie modérée et raffine le résultat dont je viens de parler. Le second résultat, quant à lui, concerne l'action de l'inertie sauvage et généralise notamment d'anciens résultats de Fontaine et Abrashkin.

2.3.1 Bornes pour les poids de l'inertie modérée

Soient V une représentation semi-stable de G_K et $T \subset V$ un $\mathbb{Z}_p$-réseau stable par l'action de G_K. À ces données, il est associé plusieurs séries de nombres entiers : il y a

- premièrement, les poids de Hodge-Tate de V, notés $h_1 \leqslant h_2 \leqslant \cdots \leqslant h_d$ (où d est la dimension de V),
- deuxièmement, les pentes du Frobenius du (ϕ, N)-module filtré associé à V, notées $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_d$, et
- troisièmement, les poids de l'inertie modérée de la représentation T/pT, notés $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_d$.

Le principe de Brauer-Nesbitt assure qu'en fait les i_j ne dépendent que de V, et pas du choix du réseau T. Les trois familles de nombres précédemment considérées sont donc canoniquement associés à la représentation semi-stable V, et il fait sens de vouloir les comparer. Un certain nombre de résultats étaient déjà connus dans cette direction ; on savait par exemple depuis longtemps que l'inégalité

$$h_1 + \cdots + h_t \leqslant n_1 + \cdots + n_t$$

était satisfaite pour tout t, avec en outre égalité pour $t = d$. Ce résultat se reformule parfois de façon plus visuelle en termes de polygones : on dit alors que le polygone de Hodge de V, qui est la ligne brisée obtenue en reliant dans le plan successivement les points de coordonnées $(t, h_1 + \cdots + h_t)$ pour t allant de 1 à d est situé au-dessous du polygone de Newton obtenu de façon analogue à partir des n_j, et que ces deux polygones ont même point terminal. Par ailleurs, comme je l'ai déjà mentionné, j'avais démontré dans ma thèse que si tous les h_j sont compris entre 0 et r, alors il en est de même des $\frac{i_j}{e}$. Si l'on appelle *polygone de*

[2] Bien sûr, les mêmes conditions sont également vérifiées pour les quotients de réseaux dans les représentations cristallines, puisque ces dernières sont en particulier semi-stables. Toutefois, il est rare que l'on ait des conditions plus précises dans le cas cristallin.

l'inertie modérée de V la ligne brisée associé aux pentes $\frac{i_j}{e}$ par la même recette que précédemment, nous avons remarqué avec David Savitt que le résultat de ma thèse peut être raffiné de la façon suivante.

Théorème 4 (avec David Savitt)**.** *On conserve les notations précédentes et on suppose $er < p - 1$. Alors, le polygone de Hodge de V est situé au dessous du polygone de l'inertie modérée de V, et ceux-ci ont même point terminal.*

Nous aurions aimé, pour compléter l'étude, comparer le polygone de l'inertie modérée avec le polygone de Newton. Malheureusement, nous n'avons obtenu qu'un résultat partiel dans cette direction, qui dit que, toujours sous l'hypothèse $er < p - 1$, tant que les polygones de Hodge et de Newton sont confondus, le polygone de l'inertie modérée reste lui aussi coincé entre les deux. Ceci nous a conduit à poser la question suivante.

Question 5. *On conserve les notations précédentes et on suppose $er < p - 1$. Est-il vrai que le polygone de Newton de V est toujours situé au dessus du polygone de l'inertie modérée de V ?*

Pour tenter de répondre à cette question, nous avons voulu commencer par étudier quelques exemples mais, hélas, nous nous sommes vite rendus compte que les calculs devenaient très rapidement laborieux, et même bientôt impraticables, au moins à la main. Nous avons malgré tout étudié une famille (assez restreinte) de représentations cristallines de dimension 2 qui, si elle ne nous a finalement apporté aucune indication en ce qui concerne la question 5, nous a permis d'exhiber les premiers exemples de représentations cristallines[3] pour lesquelles le polygone de l'inertie modérée n'est pas égal au polygone de Hodge. Plus précisément, voici le résultat que nous avons obtenu :

Théorème 6 (avec David Savitt)**.** *On suppose $e > 1$. Alors, pour tout $v \in \{0, \dots, e\}$, il existe une représentation cristalline V à poids de Hodge-Tate 0 et 2 et un réseau $T \subset V$ stable par G_K tels que les poids de l'inertie modérée de T/pT soient $1 - \frac{v}{e}$ et $1 + \frac{v}{e}$.*

La démonstration de ce deuxième théorème a fait l'objet de la publication indépendante [8].

2.3.2 Bornes pour l'action de l'inertie sauvage

Après avoir borné l'action de l'inertie modérée, il est naturel de s'intéresser à celle de l'inertie sauvage. En réalité, cette question avait déjà étudiée par plusieurs auteurs, et notamment Fontaine et Abrashkin, qui avaient été les pionniers dans ce domaine, et avaient montré, respectivement dans [29] et [25], comment la théorie de Fontaine-Laffaille pouvait être utilisée pour borner l'action de l'inertie sauvage sur les quotients de deux réseaux dans une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate compris entre 0 et $p - 2$, dans le cas où $e = 1$. Ces bornes s'expriment en termes de la filtration de ramification en numérotation supérieure du groupe G_K. De façon précise, si l'on note (G_K^μ) cette filtration de ramification telle que définie dans [30] (on prendra garde au fait que la convention de *loc. cit.* diffère de celle de [41], Chap. IV par un décalage de 1 dans les indices), on a le théorème suivant.

Théorème 7 (Abrashkin, Fontaine)**.** *On suppose $e = 1$. Soit T le quotient de deux réseaux dans une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate dans $\{0, \dots, r\}$ pour un entier $r < p - 1$. Soit n un entier tel que $p^n T = 0$. Alors, pour tout nombre réel*

$$\mu > e\Big(n + \frac{r}{p-1}\Big),$$

le sous-groupe G_K^μ agit trivialement sur T.

Dans une note manuscrite qu'il avait eu la gentillesse de me faire connaître, Breuil avait expliqué comment on pouvait étendre le résultat de Fontaine et Abrashkin à certaines représentations semi-stables (satisfaisant la transversibilité de Griffiths) dans le cas où $n = 1$. C'est de cette façon que j'en suis arrivé à m'intéresser à ce problème, et ai souhaité voir jusqu'où ce type de méthodes pouvait amener. En étudiant les preuves de Fontaine, Abrashkin et Breuil, je me suis rendu compte que leurs arguments semblaient se transposer plutôt bien dans le cadre général de la théorie de Breuil. Cela devait donc permettre de généraliser le théorème 7, d'une part, en supprimant l'hypothèse sur e et, d'autre part, en autorisant T à être un quotient réseaux dans une représentation semi-stable. Mais mieux encore, lors de l'examen de ces preuves, je fus frappé par le rôle presque fantomatique joué par l'opérateur de monodromie. Par exemple, dans le cas le plus simple où $n = 1$, l'argument se développait en deux étapes comme suit :

[3] Breuil avait déjà donné de tels exemples avec des représentations semi-stables.

– dans un premier temps, on montrait qu'étant donné $\mathcal{M}$ un objet de la catégorie $\mathrm{Mod}_{/S_\infty}^{r,\phi,N}$, l'isomorphisme *a priori* G_∞-équivariant

$$T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil}^r,\phi_r}(\mathcal{M}, A_{\mathrm{cris}})$$

(voir le début du paragraphe 2.1.2) est en fait G_1-équivariant, et

– dans un second temps, on étudiait l'action de G_1 sur $\mathrm{Hom}_{S,\mathrm{Fil}^r,\phi_r}(\mathcal{M}, A_{\mathrm{cris}})$ en copiant, presque *verbatim*, la méthode introduite par Fontaine.

C'est cette constatation qui m'a suggéré l'idée qu'il devait être possible d'obtenir un résultat valable pour tout r en remplaçant la théorie de Breuil par celle de Kisin. Toutefois, cela allait demander un peu de travail supplémentaire : il fallait comprendre quel était l'équivalent de la première étape dans ce nouveau contexte, c'est-à-dire comment l'on passe de G_∞ à G_1, et plutôt en fait à un G_s pour un entier (fini) s. En analysant la situation esquissée ci-dessus mettant en jeu la théorie de Breuil, je me suis vite rendu compte qu'un ingrédient permettant d'aller de G_∞ à G_1 est que u^{ep} s'annule dans S_1. Cette propriété implique en effet que l'action de G_1 est triviale sur $u \in S_1$ (bien qu'elle ne le soit pas sur $u \in S$), et ceci suffit essentiellement à assurer ce que l'on désire. Je cherchais donc à comprendre comment modifier la théorie de Kisin (en torsion) pour rendre u nilpotent, et c'est de cette façon que j'ai remarqué qu'une variante du lemme de Hensel montrait qu'à r et n fixés, un objet de $\mathrm{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$ annulé par p^n était entièrement déterminé par sa réduction modulo u^N pour un entier N strictement supérieur à $\frac{erpn}{p-1}$ (notez qu'en particulier, pour $r < p-1$ et $n = 1$, on retrouve la borne ep). Avec un peu de travail, ceci me permettait finalement de montrer que, si $\mathfrak{M}$ est un objet de $\mathrm{Mod}_{/\mathfrak{S}_\infty}^{r,\phi}$ annulé par p^n, la G_∞-représentation $T_{\mathfrak{S}}(\mathfrak{M})$ se prolonge canoniquement à G_s pour tout entier $s > n - 1 + \log_p(nr)$. Toutefois, il restait encore à montrer que si $\mathfrak{M}$ s'écrivait $\hat{\mathfrak{M}}/\hat{\mathfrak{M}}'$ où $\hat{\mathfrak{M}}$ et $\hat{\mathfrak{M}}'$ correspondait à deux réseaux L et L' dans une représentation semi-stable, alors la G_s-représentation associée à $\mathfrak{M}$ coïncidait avec la restriction à G_s du quotient L'/L (*a priori*, on savait seulement que ces deux représentations étaient isomorphes en restriction à G_∞). Par chance Liu, avec qui j'avais déjà travaillé, venait de mettre au point une extension de la théorie de Kisin permettant d'appréhender l'action du groupe de Galois G_K en entier (voir [37]). Je lui soumettais donc ma question, qu'il résolut rapidement. C'est ainsi que nous avons obtenu le théorème suivant, qui fait l'objet de l'article [6].

Théorème 8 (avec Tong Liu)**.** *Soit r un entier positif ou nul. Soit T le quotient de deux réseaux dans une représentation semi-stable de G_K dont les poids de Hodge-Tate sont dans $\{0, \ldots, r\}$. Soit n un entier tel que $p^n T = 0$. On écrit $\frac{nr}{p-1} = p^\alpha \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{p} < \beta \leqslant 1$. Alors, pour tout*

$$\mu > 1 + e \cdot \left[n + \alpha + \max\left(\beta, \frac{1}{p-1}\right)\right]$$

le sous-groupe G_K^μ agit trivialement sur T.

Il est intéressant de comparer les bornes données par les théorèmes 7 et 8 respectivement. En effet, si l'on approxime α par $\log_p(nr)$ et β par 1, on obtient le développement asymptotique suivant pour la borne du théorème 8 :

$$en + e \log_p(nr) + O(1) = en + e \log_p(n) + e \log_p(r) + O(1),$$

dans lequel on voit apparaître une dépendance logarithmique en r, alors que l'on aurait plutôt pu croire à une dépendance linéaire à la suite du théorème de Fontaine et Abrashkin. Par contre, la dépendance en n est, elle, moins bonne dans notre résultat à cause du terme parasite $e \log_p(n)$. Ceci nous a conduit à émettre la conjecture suivante dans le même article.

Conjecture 9 (avec Tong Liu)**.** *Le résultat du théorème 8 reste valable si l'on définit α et β par $\frac{r}{p-1} = p^\alpha \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{p} < \beta \leqslant 1$.*

Depuis, quelques progrès ont été accompli en lien avec cette conjecture. J'y reviendrai dans le paragraphe 2.4.2 (voir théorème 16).

2.3.3 Quels sont les quotients de deux réseaux dans une représentation semi-stables ?

Comme je l'ai mentionné au début du paragraphe 2.3, on aimerait idéalement savoir caractériser complètement les représentations de torsion de G_K qui apparaissent comme réseaux de deux quotients dans une représentation cristalline ou semi-stable (et pas seulement disposer de conditions nécessaires). En fait, pour ce problème général, nous émettons avec Liu, dans [6], une hypothèse optimiste que voici :

Question 10. *Est-il vrai que toute $\mathbb{Z}_p$-représentation de G_K annulée par une puissance de p s'écrit comme un quotient de deux réseaux dans une représentation cristalline ?*

Bien entendu, si la réponse à cette question est affirmative, il en est de même si on remplace « cristalline » par « semi-stable ». Nous démontrons de surcroît que, si la réponse à la question est affirmative, il suffit de le démontrer pour les représentations tuées par p lorsque $K = \mathbb{Q}_p$. Toutefois, il semble que nous soyons encore loin de savoir résoudre ce problème, même dans sa formulation restreinte.

De même, nous n'avons que peu d'idées pour caractériser, parmi les représentations de torsion de G_K, celles que l'on peut écrire comme le quotient de deux réseaux dans une représentation cristalline ou semi-stable à poids de Hodge-Tate prescrits, typiquement appartenant tous à un ensemble $\{0, \ldots, r\}$ pour un certain entier r. Les théorèmes 4 et 8 donnent des conditions nécessaires, mais il semble peu plausible qu'elle soient suffisantes.

2.4 Les (ϕ, τ)-modules

Comme je l'ai expliqué dans le paragrphe 2.3.2, lors de mon travail sur l'action de l'inertie sauvage, j'ai été amené à étudier en détails l'article [37] de Liu, dont le but était d'ajouter une structure supplémentaire aux objets de $\mathrm{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\infty,\phi}$ afin de tenir compte de l'action de G_K. En fait, Liu ne développait sa théorie uniquement dans le cadre représentations semi-stables. J'avais pourtant l'impression très nette que les méthodes utilisées — qui, au final, se révélaient être assez proches des idées introduites par Fontaine pour la théorie des (ϕ, Γ)-modules — semblaient de nature à s'étendre à toutes les représentations galoisiennes, y compris celles de torsion. En outre, dans son papier, Liu posait la question suivante :

Question 11. *Est-il vrai que toute représentation, dont la restriction à G_∞ provient d'un objet de $\mathrm{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\infty,\phi}$, est potentiellement semi-stable ?*

J'ai été rapidement très motivé à la fois par mon intuition et la question de Liu, et c'est ainsi que j'ai commencé à réfléchir à ce qui allait devenir la théorie des (ϕ, τ)-modules.

2.4.1 L'apparition des (ϕ, τ)-modules

Comme point de départ, je cherchais à étendre la théorie de [37] à toutes les représentations galoisiennes. Pour expliquer correctement mon cheminement, il me faut d'abord brièvement rappeler qu'un ϕ-module étale M sur $\mathcal{E}^{\text{int}}$ et la $\mathbb{Z}_p$-représentation galoisienne T qui lui est associée sont liés par les formules :

$$M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathcal{E}^{\text{int,ur}}) \quad \text{et} \quad T = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}^{\text{int}},\phi}(M, \mathcal{E}^{\text{int,ur}})$$

où $\mathcal{E}^{\text{int,ur}}$ est une certaine $\mathcal{E}^{\text{int}}$-algèbre munie à la fois d'un endomorphisme ϕ et d'une action de G_∞. En fait, par construction, $\mathcal{E}^{\text{int,ur}}$ apparaît comme une sous-algèbre dense d'un anneau de vecteurs de Witt $W(L)$, où L est un corps isomorphe au complété de $k((u))^{\text{sep}}$ (la clôture séparable d'un corps de séries formelles en une variable u) pour la topologie u-adique. Bien entendu, le Frobenius ϕ se prolonge naturellement à $W(L)$. Il se trouve qu'il en est de même de l'action de G_∞ qui, en outre, agit sur $k((u))^{\text{sep}}$ *via* l'isomorphisme de la théorie du corps des normes $G_\infty \simeq \mathrm{Gal}(k((u))^{\text{sep}}/k((u)))$; en particulier, G_∞ agit trivialement sur $k((u))$. De surcroît, l'action de G_∞ sur $W(L)$ s'étend de façon canonique à tout G_K. En supposant maintenant que T est une représentation de G_K, on aimerait définir sur M une action de G_K *via* la formule usuelle :

$$\sigma \cdot f : x \mapsto \sigma f(\sigma^{-1}(x)) \quad (\sigma \in G_K,\, f \in M,\, x \in T).$$

Toutefois, cela ne fonctionne pas car le morphisme $\sigma \cdot f$ ainsi défini n'est, d'une part, plus G_∞-équivariant mais $(\sigma G_\infty \sigma^{-1})$-équivariant et, d'autre part, il ne prend plus ses valeurs dans $\mathcal{E}^{\text{int,ur}}$, mais plutôt dans $\sigma\mathcal{E}^{\text{int,ur}}$ (considéré comme un sous-espace de $W(L)$). Une solution permettant de contourner ces deux problèmes consiste à remplacer M par

$$M' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[H_\infty]}(T, W(L))$$

où H_∞ est le plus grand sous-groupe de G_∞ qui est distingué dans G_K, c'est-à-dire le groupe de Galois absolu de l'extension $K_\infty(\zeta_{p^s}, s \geqslant 0)$ où les ζ_{p^s} forment une famille (compatible) de racines primitives

p^s-ièmes de l'unité. En effet, sur ce nouvel espace, la formule $\sigma \cdot f : x \mapsto \sigma f(\sigma^{-1}(x))$ définit bien une action de G_K qui, de surcroît, se factorise par H_∞. Par ailleurs, on a un lien simple entre M et M' comme l'indique la proposition suivante.

Proposition 12. *L'application naturelle $W(L^{H_\infty}) \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M \to M'$ est un isomorphisme.*

Ainsi, en conservant les notations précédentes, le produit tensoriel $W(L^{H_\infty}) \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M$ est naturellement munie d'une action du groupe G_K (qui se factorise par G_K/H_∞). En outre, un calcul immédiat montre qu'un élément σ du sous-groupe G_∞ agit simplement par $\sigma \otimes \text{id}$. Par ailleurs, on peut montrer qu'il existe un élément τ dans H_∞ qui, avec G_∞ engendre G_K. Connaître l'action complète de G_K sur $W(L^{H_\infty}) \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M$ se résume donc, au final, à connaître l'action de τ sur cet espace. Et, de fait, en manipulant un peu, je me suis rendu compte qu'il était finalement plus agréable de ne retenir que l'action de τ. Me rappelant que l'on peut choisir τ de façon à ce qu'il vérifie la relation $\sigma\tau = \tau^{\chi(\sigma)}\sigma$ pour tout $\sigma \in G_\infty$ (ici, χ désigne le caractère cyclotomique), j'arrivais à la définition 13 ci-après et, dans la foulée, je démontrais également le théorème 14 qui la suit.

Définition 13. Un (ϕ, τ)-module sur $(\mathcal{E}^{\text{int}}, W(L^{H_\infty}))$ est la donnée d'un ϕ-module étale M sur $\mathcal{E}^{\text{int}}$ muni d'un endomorphisme $\tau : W(L^{H_\infty}) \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M \to W(L^{H_\infty}) \otimes_{\mathcal{E}^{\text{int}}} M$ vérifiant $(\sigma \otimes \text{id}) \circ \tau = \tau^{\chi(\gamma)} \circ (\sigma \otimes \text{id})$ pour tout $\gamma \in G_\infty$ tel que $\chi(\gamma) \in \mathbb{N}$.

Remarque. La condition de commutation imposée dans la définition implique que τ^{p^s} tend vers l'identité quand s tend vers l'infini (pour une topologie adéquate) puis, par un passage à la limite, que $(\sigma \otimes \text{id}) \circ \tau = \tau^{\chi(\gamma)} \circ (\sigma \otimes \text{id})$ pour tout $\gamma \in G_\infty$, sans condition sur $\chi(\gamma)$. Également, puisque -1 s'écrit comme une limite (p-adique) d'entiers naturels, on en déduit que τ est bijectif.

Théorème 14. *On a une équivalence de catégories :*

$$\begin{array}{rcl} \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{Z}_p\textit{-représentations de} \\ \textit{type fini de } G_K \end{array} \right\} & \xrightarrow{\sim} & \left\{ \ (\phi,\tau)\textit{-modules sur } (\mathcal{E}^{\text{int}}, W(L^{H_\infty})) \ \right\} \\ T & \mapsto & \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, \mathcal{E}^{\text{int,ur}}) \\ \text{Hom}_{\mathcal{E}^{\text{int}},\phi}(M, \mathcal{E}^{\text{int,ur}}) & \leftarrow\!\shortmid & M \end{array}$$

2.4.2 L'anneau de définition de l'opérateur τ

Avant de poursuivre l'exposé de la théorie, j'aimerais revenir un instant sur la méthode de [37], afin de la mettre en parallèle avec ce qui vient d'être dit. Comme je l'ai déjà dit, dans cette référence, Liu se restreignait au cas où la représentation T est un réseau dans une représentation semi-stable. Cependant, en contrepartie, il arrivait à un résultat légèrement plus satisfaisant que le théorème 14 que je viens d'énoncer.

Voici comment Liu procédait. Dans la situation qu'il considérait, il était possible d'appliquer la théorie de Kisin qui lui assurait entres autres que le ϕ-module M associé à T provenait par extension des scalaires d'un objet $\mathfrak{M}$ de $\text{Mod}^{\infty,\phi}_{/\mathfrak{S}_\infty}$. Par ailleurs, s'appuyant sur d'anciens travaux, il savait construire un opérateur τ (qui est l'équivalent de celui que j'ai introduit dans le paragraphe précédent) à partir de l'opérateur de monodromie agissant sur le (ϕ, N)-module filtré de Fontaine associé à la représentation semi-stable $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T$. Il obtenait ainsi un (ϕ, τ)-module[4] puis démontrait un résultat dans la veine du théorème 14 à l'exception que celui-ci était restreint aux réseaux dans les représentations semi-stables. Par contre, les (ϕ, τ)-modules de Liu étaient un peu plus agréables que les miens, notamment car l'action de τ était définie sur un anneau légèrement plus sympatique : à la place de $W(L^{H_\infty})$, Liu travaillait avec un anneau de séries $\mathcal{R}$ plus explicite (mais, malgré tout, loin d'être bien compris).

C'est cette constatation qui m'a poussé à poursuivre mon investigation afin de voir s'il était possible de comprendre et décrire l'anneau $W(L^{H_\infty})$, voire éventuellement de le remplacer dans certains cas par d'autres plus petits et plus explicites à l'instar de celui de Liu.

Une étude sommaire du corps L^{H_∞} Il est possible d'apporter des éléments de réponse précis à la première question (la description de $W(L^{H_\infty})$) mais, malheureusement, ceux-ci sont tout sauf encourageant. Le fait est qu'un théorème général d'Ax permet de mener à bien le calcul des points fixes de L sous l'action

[4]En fait, Liu préférait conserver l'action de tout G_K/H_∞ plutôt que de se limiter à celle de τ, mais cela ne modifie pas fondamentalement la donne.

de H_∞ ; de façon légèrement plus générale, le théorème en question affirme que si H est un sous-groupe de $G_\infty \simeq \mathrm{Gal}(k((u))^{\mathrm{sep}}/k((u)))$, alors L^H s'identifie à l'adhérence dans L (pour la topologie u-adique) du perfectisé de $(k((u))^{\mathrm{sep}})^H$. Ainsi, même en supposant que l'on parvienne à décrire les éléments de $(k((u))^{\mathrm{sep}})^{H_\infty}$ en termes de séries (je reviendrai rapidement sur cette question dans l'alinéa suivant), les étapes de perfectisation et de complétion vont ensuite dans tous les cas conduire à des anneaux de séries faisant intervenir des exposants fractionnaires et des conditions de convergeance subtiles, dont il y a fort à parier qu'ils ne laisseront pas manipuler aisément.

En ce qui concerne le calcul des points fixes de $k((u))^{\mathrm{sep}}$ sous H_∞, on ne trouve rien de vraiment plus réjouïssant. En effet, si l'on écrit H_∞ comme l'intersection des sous-groupes $H_s = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K_\infty(\zeta_{p^s}))$ pour $s \geqslant 0$, on voit apparaître $(k((u))^{\mathrm{sep}})^{H_\infty}$ comme la réunion infinie des $\ell_s = (k((u))^{\mathrm{sep}})^{H_s}$ où, pour s suffisamment grand, ℓ_{s+1} est une extension de degré p de ℓ_s. Ainsi, ℓ_{s+1} s'obtient à ℓ_s en ajoutant une racine d'un polynôme de la forme $X^p - X - a_s$ pour un certain $a_s \in \ell_s$. Toutefois, je ne sais pour l'instant pas calculer explicitement ces éléments a_s. J'ai soumis lors de mon séjour à Moscou[5] cette question à Serguey Gorchinsky qui, avec un de ses étudiants, a obtenu des résultats partiels dans cette direction. En tous cas, il est vrai que chacun des corps ℓ_s s'identifie à un corps de séries formelles $k((u_s))$ (où u_s est par exemple une uniformisante de ℓ_s). Par contre, le corps plus intéressant $\ell_\infty = \bigcup_{s \geqslant 0} \ell_s$, lui, ne se décrit pas aussi simplement. Au mieux, on peut voir ses éléments comme des séries en tous les u_s, chacun d'entre eux étant liés aux autres par des formules qu'il reste à écrire.

En résumé donc, il semble que pour écrire les éléments de L^{H_∞}, on n'a pas d'autre choix que d'avoir recours à des séries formelles faisant intervenir une infinité de variables u_s (dépendentes les unes par rapport aux autres), des exposants fractionnaires et des conditions de convergence délicates. Malgré tout, il reste quand même intéressant de comprendre précisément les liens entre les u_s, d'autant plus que, comme nous allons le voir, ceux-ci interviendront à nouveau dans la suite.

Le cas des représentations de torsion Les descriptions peu ragoutantes du corps L^{H_∞} qui viennent d'être données m'ont finalement conduit à me rabattre sur la deuxième question : est-il envisageable, au moins dans certaines situations particulières (comme c'était déjà le cas pour les réseaux dans les représentations semi-stables d'après les résultats de Liu), de remplacer l'anneau $W(L^{H_\infty})$ qui intervient dans le théorème 14 par un autre anneau plus agréable ? Comme il est fréquent pour ce type de questions que l'on procède par passage à la limite à partir des représentations de torsion, je commençais par me pencher sur ce cas.

Mon point de départ était la remarque suivante : puisque l'action de G_K sur une représentation de torsion se factorise toujours par un quotient fini (car l'image de la représentation est finie), il devrait être possible de remplacer, d'une façon ou d'une autre, le corps ℓ_∞ par un des corps ℓ_s pour un certain entier s qui, en outre, devrait dépendre explicitement de l'extension de K découpée par le noyau de la représentation T, et probablement même uniquement de ses propriétés de ramification. Pour asseoir mon intuition, je revenais à la formule $M' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_\infty]}(T, W(L))$ et me retrouvais, malheureusement, d'emblée confronté à une difficulté : s'il est bien vrai qu'il existe une extension finie K'/K telle que $G_{K'}$ (le groupe de Galois absolu de K') agisse trivialement sur T, une telle extension n'existe pas lorsqu'on considère l'action de G_K sur $W(L)$. Pourtant, il aurait été agréable que l'action de G_K sur M' se factorise par un quotient fini $\mathrm{Gal}(K'/K)$, puisque cela aurait permis de remplacer L^{H_∞} par le sous-corps $L^{H_\infty G_{K'}}$, nettement plus petit. Je compris toutefois immédiatement que ce problème était de même nature que celui que j'avais déjà rencontré lors de l'étude de l'action de l'inertie sauvage (voir paragraphe 2.3.2) et donc, par la même occasion, ce qu'il convenait de faire pour le surmonter : au lieu de travailler avec les (ϕ, τ)-modules eux-mêmes, il fallait considérer des réseaux à l'intérieur de ceux-ci et travailler avec leurs réductions modulo un élément bien choisi ; ceci allait permettre de remplacer l'anneau de périodes $W(L)$ par un quotient de $W(R)$ dans lequel l'action de G_K sur la variable u se factorise par un quotient fini. Les réseaux à l'intérieur des ϕ-modules étales ayant déjà été étudiés (d'abord par Fontaine, puis par Liu et moi-même), il m'a été facile d'arriver à la définition suivante.

Définition 15. Soit M un (ϕ, τ)-module. Un (ϕ, τ)-*réseau de* M est un $\mathfrak{S}$-module de type fini $\mathfrak{M} \subset M$ tel que :

– l'application canonique $\mathcal{E}^{\mathrm{int}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \to M$ est un isomorphisme ;

– le Frobenius ϕ de M stabilise $\mathfrak{M}$;

[5] Je reviendrai plus longuement sur ce séjour dans le paragraphe 2.7.

– l'opérateur τ stabilise $W(R^{H_\infty}) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$.
Étant donné un élément $U \in W(R)$ non multiple de p, on dit qu'un réseau $\mathfrak{M}$ est de *hauteur divisant* U si le conoyau de $\mathrm{id} \otimes \phi : W(R) \otimes_{\phi,\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \to W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ est annulé par U.

La définition précédente garde un sens pour tous les (ϕ,τ)-modules mais, contrairement au cas libre, on a dans le cas de torsion la propriété agréable suivante : tout (ϕ,τ)-module de torsion admet un (ϕ,τ)-réseau. Pour poursuivre mon idée, il me fallait maintenant étudier l'action de τ sur un (ϕ,τ)-réseau, ou plutôt sur le quotient de celui-ci modulo un élément bien choisi. Reprenant les méthodes que nous avions introduites avec Liu dans [6], cette étape s'est avérée, certes un peu longue et technique, mais sans difficulté, ni surprise majeure. Voici les deux théorèmes principaux que j'ai obtenus.

Théorème 16. *Soient U un élément de $W(R)$ non divisible par p et $\mathfrak{M}$ un (ϕ,τ)-réseau de hauteur divisant U à l'intérieur d'un (ϕ,τ)-module M. On suppose qu'il existe un entier n tel que $p^n\mathfrak{M} = 0$, et on se donne*[6] *un élément V tel que $\phi(V) = UV$. Soit h un entier tel que u^h divise (U mod p) dans l'anneau R. Alors, pour tout*

$$\mu > c(K) + e \cdot \max\left(\frac{1}{p-1}, n + \log_p\left(\frac{h}{e}\right)\right) \quad \textit{(où } c(K) \textit{ est une constante ne dépendant que de } K\textit{)}$$

le groupe G_K^μ agit trivialement sur la représentation associée au (ϕ,τ)-module M.

Théorème 17. *Il existe une constante $c'(K)$ ne dépendant que de K telle que pour toute donnée de*
– *deux éléments U et V de $W(R)$ non multiples de p tels que $\varphi(V) = UV$,*
– *un entier h tel que u^h divise (U mod p) dans R, et*
– *un entier $n \geqslant 0$ et un (ϕ,τ)-réseau $\mathfrak{M}$ de hauteur divisant U à l'intérieur d'un (ϕ,τ)-module M tel que $p^{n+1}M = 0$,*

on ait, en notant s_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $\log_p(h) + c'(K)$, l'inclusion suivante pour tout $s \geqslant 0$:

$$(\tau^{p^s} - \mathrm{id})(\mathfrak{M}) \subset \left(VW(R^{H_\infty}) + (\mathcal{E}^{\mathrm{int}}_{s_0-s+n} \cap W(R))\right) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M} \tag{2}$$

dans laquelle si $m > 0$, $\mathcal{E}^{\mathrm{int}}_m$ est l'unique extension non ramifiée de $\mathcal{E}^{\mathrm{int}}$ ayant pour corps résiduel ℓ_m et, si $m \leqslant 0$, par convention $\mathcal{E}^{\mathrm{int}}_m = 0$.

J'aimerais souligner que la démonstration du premier théorème ne fait jamais intervenir l'opérateur τ, et suit un cheminement analogue (avec toutefois une petite divergeance sur la fin) à celle du théorème 8. Le second théorème, quant à lui, se déduit du premier en suivant les idées que j'ai exposées au début de ce paragraphe. Il est vrai que son apparence est assez technique mais, disons dans le cas où $\mathfrak{M}$ est annulé par p, il dit bien qu'après réduction modulo V, il suffit de travailler avec $\mathcal{E}^{\mathrm{int}}_{s_0} \cap W(R)$ en lieu et place de $W(R^{H_\infty})$. Or, ce nouvel anneau est isomorphe à un anneau de série formelle $k[[u_{s_0}]]$ où u_{s_0} est une uniformisante du corps ℓ_{s_0}.

D'autre part, l'énoncé du premier théorème me semble intéressant en lui-même, et c'est pourquoi j'ai choisi de l'isoler dans ce texte et que j'aimerais revenir un instant sur son contenu. Essentiellement, j'aimerais dire qu'il s'applique en particulier aux quotients de deux réseaux dans une représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate dans $\{0,\dots,r\}$ pour $h = er$. Ainsi, ce résultat apparaît comme un pas en avant dans la démonstration de la conjecture 9. De plus, il est remarquable qu'il admet une réciproque partielle pour les représentations de caractéristique p :

Proposition 18. *Soit T une $\mathbb{F}_p$-représentation de dimension finie de G_K, et soit h un entier strictement positif tel que G_K^μ agisse trivialement sur T pour tout $\mu > 1 + \frac{e}{p-1} + e \cdot (1 + \log_p(\frac{h}{e}))$. Alors le (ϕ,τ)-module associé à T admet un (ϕ,τ)-réseau de hauteur divisant u^{hp}.*

Cette proposition semble avoir toutes les caractéristiques d'un point de départ intéressant pour attaquer les questions du paragraphe 2.3.3.

[6]On peut montrer qu'un tel élément V existe toujours et, en outre, que l'idéal qu'il engendre dans $W(R)$ ne dépend que de U.

Le cas des représentations libres de $E(u)$-hauteur finie Comme attendu, le théorème 17 fournit par passage à la limite un contrôle de l'action de τ sur un (ϕ, τ)-réseau de hauteur divisant U. Toutefois, le résultat que l'on obtient ainsi n'est pas vraiment satisfaisant car l'inclusion limite que l'on déduit de (2) fait à nouveau intervenir un anneau compliqué (qui, notamment, s'exprime en fonction de tous les $\mathcal{E}_m^{\text{int}}$) qui, bien que nettement mieux compris que $W(R^{H_\infty})$, reste quand même difficile à manipuler. En particulier, cet anneau était encore nettement plus gros que l'anneau $\mathcal{R}$ que Liu avait défini dans [37]. On pouvait donc encore certainement progresser dans cette direction.

Toujours motivé par la question 11, je décidai de me restreindre (au moins dans un premier temps) au cas des représentations de $E(u)$-hauteur finie, c'est-à-dire des (ϕ, τ)-réseaux de hauteur divisant $E(u)^r$ pour un certain entier r, ce qui revient encore à dire que le ϕ-réseau sous-jacent est un objet de $\text{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\infty,\phi}$. De l'approche de Liu, il émergeait clairement l'idée que l'opérateur $\log \tau$ devait avoir un rôle important à jouer. En effet, en appliquant formellement le logarithme à l'égalité $(\sigma \otimes \text{id}) \circ \tau \circ (\sigma \otimes \text{id})^{-1} = \tau^{\chi(\gamma)}$, on se rend compte que tout y appartenant à $\log \tau(\mathfrak{M})$ doit satisfaire la relation :

$$(\sigma \otimes \text{id})(y) = \chi(\sigma) y \quad \text{pour tout } \sigma \in G_\infty. \tag{3}$$

Bien sûr, l'intérêt majeur de cette dernière condition réside dans le fait qu'elle est valable pour tout σ dans G_∞ (et non pas dans un sous-groupe d'indice fini de G_∞, voire même H_∞), ce qui laisse penser qu'elle devrait être plus contraignante que ce qui a été exploité jusqu'à présent. Et, effectivement, les solutions de (3) dans $W(L)$ forment un module libre de rang 1 sur l'anneau $W(L^{G_\infty})$, tandis que L^{G_∞} s'identifie au complété du perfectisé de $k((u))$. Toutefois, cela ne fonctionne pas si facilement car la série définissant le logarithme de τ ne converge *a priori* pas dans l'espace des endomorphismes de $W(R) \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$. Par contre, à partir du théorème 17, il est facile de déduire que, lorsque τ est congru à l'identité modulo l'idéal maximal de $W(R^{H_\infty})$, le logarithme de τ est bien défini en tant qu'endomorphisme de $A_{\text{cris}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$. Finalement, en résolvant l'équation (3) dans A_{cris}, et en travaillant encore un peu pour me débarasser des puissances fractionnaires et négatives de u, j'aboutissais à la proposition suivante.

Proposition 19. *On suppose que le corps K est engendré sur $W[1/p]$ par l'élément π^p. Soit $\mathfrak{M}$ un (ϕ, τ)-réseau de hauteur divisant $E(u)^r$ (pour un certain entier r). On suppose que $\mathfrak{M}$ est libre sur $\mathfrak{S}$ et que τ agit trivialement modulo l'idéal maximal de $W(R^{H_\infty})$. Alors pour tout $x \in \mathfrak{M}$, la série*

$$\log \tau(x) = \sum_{i \geqslant 1} \frac{(\tau - \text{id})^i}{i}(x)$$

converge vers un élément de $\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{S}^{\text{dp}} \otimes_{\mathfrak{S}} \mathfrak{M}$ où $\mathfrak{t}$ est un élément de $W(R)$ tel que $\phi(\mathfrak{t}) = E(u)\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{S}^{\text{dp}}$ est l'adhérence du sous-$\mathfrak{S}$-module de A_{cris} engendré par les $\frac{u^{p^n}}{p^n}$ pour $n \geqslant 0$.

Remarque. On peut également obtenir la proposition précédente sans avoir recours au théorème 17, en remplaçant A_{cris} par un autre anneau à puissances divisées. C'est en fait l'approche qui est présentée dans ma prépublication [1] dans laquelle est énoncé ce résultat.

Bien sûr le premier corollaire de la proposition 19 est un meilleur contrôle de l'action de τ. Toutefois, et cela n'est pas du tout anodin, j'aimerais expliquer qu'elle permet également d'apporter une réponse positive (sous l'hypothèse technique et peu restrictive $W[1/p](\pi^p) = K$) à la question 11 de Liu. En effet, dans le cas des représentations semi-stables, on peut vérifier très facilement (à partir des travaux de Liu) que l'opérateur $\frac{\log \tau}{p\mathfrak{t}}$ donnée par la proposition n'est rien autre que le N_∇ de la théorie de Kisin. Autrement dit, on sait maintenant retrouver le (ϕ, N_∇)-module à la Kisin à partir du (ϕ, τ)-module associé à la représentation galoisienne. Or, les hypothèses de la proposition 19 étant *a priori* valables dans un cadre différent, on peut en fait plus généralement associer un (ϕ, N_∇)-module à tout (ϕ, τ)-réseau qui satisfait aux hypothèses de ladite proposition. Mais, comme la théorie de Kisin nous apprend qu'il y a une correspondance bijective entre les (ϕ, N_∇)-modules et les représentations semi-stables, cela signifie que les hypothèses en question impliquent la semi-stabilité. À partir de là, une étude facile permet d'aboutir au corollaire suivant.

Corollaire 20. *On suppose que l'uniformisante π est telle que $W[1/p](\pi^p) = K$. Soit s le plus grand entier tel que K contienne une racine primitive p^s-ième de l'unité. Alors toute représentation de $E(u)$-hauteur finie de G_K devient semi-stable en restriction au sous-groupe (distingué) $\text{Gal}(\bar{K}/K(\sqrt[p^s]{\pi}))$.*

Je signale pour conclure ce numéro que tous les résultats que je viens de présenter font l'objet de la prépublication [1], auquel le lecteur pourra se reporter pour de nombreux compléments.

2.5 Les variétés de Kisin

Un autre sujet auquel je me suis interessé, et auquel je fus introduit par Michael Rapoport lors d'une conférence à Cetraro en 2007, est l'étude de certaines variétés algébriques que Kisin a introduites dans [34] pour résoudre certaines questions de modularité. Étant donné un ϕ-module étale[7] M sur $\mathcal{E}^{\text{int}}$, disons annulé par p, Kisin considérait dans *loc. cit.* une variété algébrique $\mathcal{X}^M$ définie sur k (je rappelle que k désigne le corps résiduel de K) dont l'ensemble des k-points est :

$$\mathcal{X}^M(k) = \big\{\mathfrak{M} \in \text{Mod}^{1,\phi}_{/\mathfrak{S}_1} \ \big|\ \mathfrak{M} \text{ est un réseau dans } M \text{ (avec le même } \phi)\big\}.$$

S'inspirant de cette construction, Pappas et Rapoport ont ensuite défini dans [39] un champ sur $\mathbb{Z}_p$ dont certaines fibres s'interprétent comme les variétés que Kisin avait définies, et en ont profité pour nommer ces dernières *variétés de Kisin*. Mais, déjà bien avant la sortie de cet article, sur la suggestion de Rapoport, je commençais à m'intéresser à l'étude des variétés de Kisin (que j'appelais à l'époque « variétés de Deligne-Lusztig généralisées »), et plus particulièrement au calcul de leurs dimensions. Ces variétés sont naturellement munies d'une stratification définie en considérant les diviseurs élémentaires de l'inclusion du $\mathfrak{S}$-module engendré par $\phi(\mathfrak{M})$ dans $\mathfrak{M}$. En s'éloignant un peu de la théorie de Kisin (et donc, par conséquent, des motivations initiales), on peut associer à tout ϕ-module étale de dimension d et tout d-uplet d'entiers $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ avec $\mu_1 \geqslant \dots \geqslant \mu_d$, une variété $\mathcal{X}^M_\mu$ dont les k-points sont donnés par :

$$\mathcal{X}^M_\mu(k) = \left\{ \text{réseaux } \mathfrak{M} \text{ de } M \ \middle|\ \begin{array}{c} \text{il existe une base } m_1, \dots, m_d \text{ de } \mathfrak{M} \text{ telle que} \\ u^{\mu_1} m_1, \dots, u^{\mu_d} m_d \text{ soit une base de } \phi(k[[u^{1/p}]] \otimes_{k[[u]]} \mathfrak{M}) \end{array} \right\}.$$

La variété $\mathcal{X}^M$ s'écrit alors comme l'union des $\mathcal{X}^M_\mu$ sur tous les d-uplets $(\mu_1, \dots, \mu_d)$ tels que $e \geqslant \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots \geqslant \mu_d \geqslant 0$. Il est également intéressant de considérer les variétés $\mathcal{X}^M_{\leqslant \mu} = \bigcup_{\mu' \leqslant \mu} \mathcal{X}_{\mu'}$ où l'on convient que $\mu' = (\mu'_1 \geqslant \dots \geqslant \mu'_d)$ est plus petit ou égal à μ si $\mu'_1 + \dots + \mu'_t \leqslant \mu_1 + \dots + \mu_t$ pour tout $t \in \{1, \dots, d\}$ avec égalité si $t = d$.

J'entrais dans ce domaine de recherche en m'intéressant au cas d'un ϕ-module M est de dimension 2. La manipulation des réseaux pouvait alors se faire explicitement et de façon tout à fait élémentaire à l'aide de matrices 2×2, et c'est en utilisant ces techniques que j'obtenais petit à petit des formules pour la définition des variétés $\mathcal{X}^M_{(\mu_1,\mu_2)}$ jusqu'à finalement épuiser tous les cas (en dimension 2). Ces calculs montraient en particulier que, lorsque la variété $\mathcal{X}^M_{(\mu_1,\mu_2)}$ n'était pas vide, sa dimension était de l'ordre de $\frac{\mu_1 - \mu_2}{p+1}$. Plus précisément, je remarquais que l'écart entre la vraie dimension et la valeur donnée par la formule $\frac{\mu_1 - \mu_2}{p+1}$ était borné indépendamment de μ_1 et μ_2 (mais par contre pas du ϕ-module M). Avec des méthodes différentes, l'étude a été ensuite reprise et complétée (il ne calculait pas uniquement la dimension, mais décrivait aussi d'autres aspects géométriques) par Hellmann dans [32].

Quelques temps après, profitant d'une invitation de Rapoport à Bonn pendant deux mois, je revenais à ce problème. J'écrivais tout d'abord proprement la démonstration d'un théorème de classification des ϕ-modules étales simples, qui avait germé dans mon esprit depuis maintenant plusieurs mois (voire plusieurs années, car une partie de mon travail de thèse traitait de question similaires). La première remarque évidente est qu'un ϕ-module simple est nécessairement annulé par p, et est donc défini sur $\mathcal{E}^{\text{int}}/p\mathcal{E}^{\text{int}} = k((u))$. Le théorème que j'obtenais concernait le cas où $k = \bar{\mathbb{F}}_p$ (j'aurais en fait aimé l'étendre à k algébriquement clos mais les méthodes que j'utilisais s'avéraient inefficaces) et s'énonçait comme suit :

Théorème 21. *Soit M un ϕ-module étale simple sur $\bar{\mathbb{F}}_p((u))$. Alors il existe un entier s et une base $(e_1, \dots, e_d)$ de M tels que $\phi(e_i) = e_{i+1}$ pour $i \in \{1, \dots, d-1\}$ et $\phi(e_d) = u^s e_1$.*

De plus, l'objet précédent est simple si, et seulement si la fraction $\frac{s}{p^d - 1}$ ne s'écrit pas sous la forme $\frac{s'}{p^{d'} - 1}$ pour un $d' < d$.

Enfin, deux objets correspondants respectivement aux couples (s, d) et (s', d') sont isomorphes si, et seulement s'il existe un entier n tel que $s \equiv p^n s' \pmod{p^d - 1}$.

Je démontrais également un énoncé analogue (un peu plus compliqué) dans le cas de Kisin où le Frobenius agit trivialement sur les coefficients (et envoie u sur u^p). Je rédigeais également ces résultats qui ont finalement fait l'objet d'un appendice à l'article d'Hellmann (voir [9]).

[7] En réalité, Kisin s'intéressait plutôt au cas où le Frobenius sur $\mathcal{E}^{\text{int}}$ agit trivialement sur les coefficients des séries. Toutefois, pour ce texte, il sera plus simple et plus cohérent de prendre pour ϕ le Frobenius considéré jusqu'à présent. Je signale quand même que les résultats qui vont être énoncés par la suite s'étendent avec quelques modifications mineures au ϕ de Kisin.

Pendant le même séjour, m'inspirant des premiers résultats concernant les dimensions des variétés de Kisin lorsque le ϕ-module étale est de dimension 2, je commençais à défricher le problème analogue en dimension 3. Je me rendis rapidement compte que les calculs devenaient alors bien plus pénibles, et que j'aurais du mal à les terminer à la main. Comme, par ailleurs, je venais de réussir à reformuler (au moins conjecturalement) mon problème en une question de programmation linéaire sur les entiers, je décidai finalement de me tourner vers l'outil informatique. J'obtenais rapidement mes premiers résultats, mais il s'agissait de valeurs brutes pour la dimension de $\mathcal{X}_\mu^M$ que j'avais de grosses difficultés à interpréter. C'est dans cette phase dubitative que j'eus connaissance du logiciel `mjollnir` de David Monniaux (voir [38]). Ce logiciel présentait l'énorme avantage pour moi de répondre non pas des valeurs numériques mais, bel et bien, des formules exprimant la solution de mon problème d'optimisation linéaire en fonction des μ_i. Toutefois, il avait l'inconvénient de ne pas optimiser sur les nombres entiers, mais plutôt sur les nombres rationnels et trouvait un résultat légèrement différent de ce qui était attendu. Toutefois, me rappelant de la situation en dimension 2 où la dimension cherchée s'écrivait comme la somme de $\frac{\mu_1-\mu_2}{p+1}$ et d'une quantité bornée, j'imaginais que la réponse donnée par le logiciel devait correspondre à la contribution principale. J'émettais comme cela plusieurs formules conjecturales supposées approcher la dimension des $\mathcal{X}_{\leqslant\mu}^M$ pour $M = k((u))^d$ muni du Frobenius agissant coordonnée par coordonnée, et $d \in \{3, 4, 5, 6\}$ (voir [3]). J'avais toutefois encore du mal à saisir l'unité dans les formules obtenues.

Je lisais en parallèle l'article [40] (traitant un problème analogue) et, au fur et à mesure que j'avançais dans ce texte, j'avais l'impression de plus en plus nette que les méthodes de Viehmann devaient pouvoir s'étendre à ma situation. En transposant dans mon contexte (ce que je fis finalement à mon retour à Rennes), la stratégie consistait à définir une nouvelle stratification $\mathcal{X}_\varphi$ de la variété des réseaux à l'intérieur de $M = k((u))^d$ (muni du Frobenius agissant coordonnée par coordonnée) où le paramètre φ varie dans une intersection $Q \cap R$ où Q (resp. R) est un cône convexe (resp. un réseau) vivant dans un espace vectoriel réel E de dimension $\frac{d(d+1)}{2}$. En outre, l'espace E était muni de formes linéaires $u_1, \ldots, u_d$ et $\dim$ telles que, pour tout $\varphi \in Q \cap R$:

$$\mathcal{X}_\varphi \subset \mathcal{X}^M_{(u_1(\varphi),\ldots,u_d(\varphi))} \quad \text{et} \quad \dim \mathcal{X}_\varphi = \dim(\varphi).$$

Il suivait alors de ces propriétés que la dimension de $\mathcal{X}_\mu^M$ était égale au suprémum de $\dim(\varphi)$ pour φ décrivant l'ensemble des points de $Q \cap R$ tels que $u_i(\varphi) = \mu_i$ pour tout i. J'étais donc à nouveau ramené à un problème de programmation linéaire entière et, encore une fois, je confiais cette question au logiciel de Monniaux en oubliant dans un premier temps la contrainte d'intégrité (c'est-à-dire, concrètement, en demandant de maximiser sur Q au lieu de $Q \cap R$). J'obtenais donc, comme ceci, de nouvelles formules et fus content de constater qu'elles étaient en accord avec les conjectures que j'avais énoncées à l'issue de mon premier essai. Toutefois, cela ne résolvait pas les problèmes que j'avais rencontrés alors ; autrement dit, il me restait encore à éclaircir les deux points suivants :

– comment quantifier l'écart entre le maximum pris sur Q et celui pris sur l'intersection $Q \cap R$;
– trouver la logique cachée derrière les formules données par le logiciel de Monniaux.

Pour le premier point, je me contentais de démontrer que la différence entre ces deux maximas restait bornée (sans vraiment savoir estimer la borne en question), au moins si φ restait suffisamment loin de la frontière de Q. Il est vrai que cela n'est pas encore entièrement satisfaisant mais, pour l'instant, je ne sais pas être plus précis. Pour le second point, je piétinais sur le plan de la numérologie (*i.e.* pour trouver une formule générale qui s'instancierait correctement dans tous les exemples calculés par le logiciel) mais réussissais quand même à avancer d'un point de vue théorique : je démontrais que les formules crachées par le logiciel de Monniaux étaient de la forme

$$\min \left\{ \langle \mu | v_1 \rangle_d , \langle \mu | v_2 \rangle_d , \ldots, \langle \mu | v_N \rangle_d \right\}$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle_d$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ et $v_1, \ldots, v_N$ étaient les points extrémaux d'un certain convexe que je savais décrire comme intersection de demi-espaces.

En fait, toutes ces méthodes s'appliquaient de même au cas des variétés $\mathcal{X}^M$, qui s'avérait finalement plus favorable car j'arrivais alors à calculer les points extrémaux du convexe qui intervenait et même à préciser l'écart entre les maximas des problèmes de programmation linéaire réels et entiers. De façon précise, voici le théorème que j'obtenais :

Théorème 22. *On suppose que $M = k((u))^d$ (muni du Frobenius agissant coordonnée par coordonnée).*

Alors, la dimension de la variété $\mathcal{X}_M$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\left[\frac{d^2}{4}\right] \cdot \left[\frac{er-p+2}{p+1}\right] \leqslant \dim_k \mathcal{X}^M \leqslant \left[\frac{d^2}{4}\right] \cdot \frac{er}{p+1}.$$

Contrastant avec ce résultat explicite, le cas des variétés $\mathcal{X}^M_\mu$ et $\mathcal{X}^M_{\leqslant\mu}$ est resté pour moi, pendant longtemps, très mystérieux. La situation s'est débloquée d'un seul coup lors d'un nouveau séjour à Bonn. Je profitais de l'occasion pour rédiger proprement mes résultats, et c'est alors que je me rendis compte, en examinant une fois de plus mes points extrémaux v_i, que ceux-ci pouvaient être indexées par un sous-ensemble $\mathcal{S}_d$ du groupe des permutations $\mathfrak{S}_d$ au moyen d'une formule simple. Autrement dit, pour toute permutation $w \in \mathfrak{S}_d$, je réussisais à définir un vecteur v_w, et il se trouvait que les vecteurs v_i que je cherchais étaient égaux aux v_w pour w décrivant $\mathcal{S}_d$. Je m'inquiétais quand même dans un premier temps de ne pas savoir décrire $\mathcal{S}_d$, mais je remarquais ensuite que ce n'était pas important. En effet, je démontrais que l'enveloppe convexe de tous les v_w (pour w parcourant $\mathfrak{S}_d$) était en fait égale à celle des v_w pour w variant dans $\mathcal{S}_d$) ; ainsi, ajouter les v_w pour $w \notin \mathcal{S}_d$ ne portait pas à conséquence. En conclusion, je venais de démontrer le théorème suivant.

Théorème 23. *On suppose que $M = k((u))^d$ (muni du Frobenius agissant coordonnée par coordonnée). Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{Z}^d$ tel que $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_d$. Si $b-1$ ne divise pas $\mu_1 + \cdots + \mu_d$, alors la variété $\mathcal{X}^M_\mu$ est vide.*

On suppose à partir de maintenant que $b-1$ divise $\mu_1 + \cdots + \mu_d$ et, en outre, que $p > 1 + \frac{d^2}{4}$. Alors :

$$\dim_k \mathcal{X}_\mu \leqslant (p-1) \cdot \min_{w \in \mathfrak{S}_d} \sum_{i=1}^{d} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i \cdot \frac{d+1-i-w^n(i)}{p^n}$$

où $\mathfrak{S}_d$ désigne le groupe des permutations de $\{1, \dots, d\}$ et $w^n = w \circ \cdots \circ w$ (n fois). De plus, il existe des constantes positives c_1 et c_2 (qui ne dépendent que de d et p) telles que si les μ_i vérifient en plus $\mu_i \geqslant \mu_{i+1} + c_1$ pour tout i, alors :

$$\dim_k \mathcal{X}_\mu \geqslant -c_2 + (p-1) \cdot \min_{w \in \mathfrak{S}_d} \sum_{i=1}^{d} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i \cdot \frac{d+1-i-w^n(i)}{p^n}.$$

Tous les résultats que je viens d'énoncer ont finalement fait l'objet de la prépublication [2], dans laquelle je traite également certains exemples avec $d = 3$ sans jamais passer par les rationnels. Les calculs deviennent alors très fastidieux mais me permettent d'avoir une expression exacte pour la dimension des variétés $\mathcal{X}^M_\mu$. Toutefois, je ne comprends toujours pas la logique des formules obtenues.

2.6 Le développement de l'outil algorithmique

En créant des liens entre les représentations p-adiques du groupe G_K et certains objets d'algèbre semi-linéaire (comme les objets des catégories $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S_\infty}$, $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_\infty}$ ou encore les (ϕ,τ)-modules), la théorie de Hodge p-adique est censée permettre à l'arithméticien de mener à bien toutes sortes de calcul portant sur les représentations p-adiques. Toutefois, comme nous l'avons plus ou moins vu précédemment, au fur et à mesure du développement de la théorie, les objets du côté algèbre semi-linéaire se complexifient et deviennent, eux aussi, difficiles à manipuler, du moins à la main. C'est à la suite de ce constat — qui m'est apparu, à plusieurs reprises, comme un handicap dans ma recherche — que l'idée de me tourner vers l'algorithmique est née : puisque les calculs deviennent de plus en plus fastidieux, le mieux ne serait-il pas de créer des outils adaptés pour manipuler les catégories $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/S_\infty}$, $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_\infty}$, *etc.* sur ordinateur ?

2.6.1 La rencontre avec David Lubicz et la thèse de Jérémy Le Borgne

Bien que n'ayant pas *a priori* une formation d'algorithmicien, ce projet m'a rapidement séduit, et j'ai commencé dès 2008 à développer un certain nombre d'efforts pour le faire naître puis vivre. J'ai, pour cela bénéficié d'une première chance inouïe, puisque c'est à la même époque que plusieurs algorithmiciens et cryptographes de la DGA (Direction Générale de l'Armement) ont été intégré à notre laboratoire de recherche. En outre, l'un de ces chercheurs, David Lubicz, était déjà familier de la manipulation sur machine de nombres p-adiques et de séries formelles, qui constituent deux ingrédients essentiels pour ce que je souhaitais faire. C'est ainsi que je lui ai naturellement fait part de mon projet, et qu'il l'a de son côté accueilli de façon favorable et enthousiaste.

Ensemble, nous avons ensuite proposé un sujet de thèse sur ce thème, dont l'objectif était de mettre au point des solutions algorithmiques pour calculer explicitement la représentation galoisienne associée à un objet (annulé par p) de $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}}$. Rapidement, ce sujet a trouvé preneur en la personne de Jérémy Le Borgne, alors élève de l'antenne de Ker Lann de l'ENS Cachan. La thèse n'est bien entendu pas encore achevée, mais j'aimerais malgré tout signaler rapidement que Le Borgne a déjà accompli un certain nombre de progrès significatifs. Notamment, il a mis au point — puis programmé — un algorithme pour réduire[8] les ϕ-modules (qui sont des objets un peu plus généraux que ceux de la catégorie $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_1}$) et en a déduit une méthode pour calculer les poids de l'inertie modérée de la représentation galoisienne associée à un objet de $\mathrm{Mod}^{r,\phi}_{/\mathfrak{S}_1}$. En outre, un certain nombre d'astuces très ingénieuses permettent à l'algorithme de Le Borgne de tourner en temps polynomial, ce qui le rend utilisable en pratique jusqu'à des dimensions élevées.

2.6.2 Le projet CETHop : calculs effectifs en théorie de Hodge p-adique

En plus de cela, j'avais également proposé mon projet de développer l'algorithmique au sein de la théorie de Hodge p-adique à plusieurs autres de mes collègues en premier lieu dans mon laboratoire à Rennes, puis ensuite à Lyon, Strasbourg et Montpellier. Ensemble, nous avons soumis à l'ANR un projet Jeunes Chercheurs intitulé « Calculs Effectifs en Théorie de Hodge p-adique (CETHop) » et présentant un certain nombre de questions algorithmiques précises que nous souhaitions étudier (en lien avec les théories présentées précédemment, mais aussi les équations différentielles p-adiques, la cohomologie des variétés, *etc.*). Le projet a finalement été retenu lors de la session de 2009, et c'est ainsi que depuis septembre 2009, j'en suis le coordinateur.

Pour plusieurs raisons liées à mon expérience passée, une question qui me motive particulièrement dans le cadre du projet CETHop est celle du calcul de réseaux dans les représentations galoisiennes *via* la détermination de structures entières (typiquement, ce que l'on appelle des *modules fortement divisibles*) à l'intérieur des objets de la théorie de Hodge p-adique. Avec David Lubicz, nous sommes en train d'étudier ce problème. Notre démarche, pour cela, est de transposer les idées de Breuil développées dans [27] dans le cadre de la théorie de Kisin en nous efforçant de les rendre complètement explicites. Nous ne sommes pour l'instant pas vraiment encore entré dans le vif du sujet car il se trouve qu'il n'existe pour l'instant pas d'outils pour la manipulation informatique des modules sur l'anneau $\mathfrak{S}$. Une étape préliminaire, que nous sommes en train de terminer, est donc de mettre au point de tels outils.

Nous venons de le voir, une autre vocation incontournable du projet CETHop, qui se situe en amont des questions pointues de théorie de Hodge p-adique, est de contribuer au développement de divers *packages* en lien avec les nombres p-adiques ou les séries formelles (je pense tout particulièrement à tout ce qui touche à l'algèbre linéaire de base) dans divers logiciels de calcul comme `magma` ou `sage`. Dans cette optique, nous avons récemment invité, à Rennes, David Roe qui est le principal auteur du support actuel pour les nombres p-adiques sous `sage`. À partir de la confrontation de nos points de vue, nous avons entâmé une réflexion intéressante sur la bonne manière de gérer la précision lors de calculs complexes faisant intervenir des nombres p-adiques (qui donnera peut-être bientôt naissance à un article), et nous avons écrit une feuille de route pour nous guider lors de nos développements futurs. Celle-ci prend la forme d'un *wiki* auquel tout le monde[9] peut contribuer, et qui se trouve à l'adresse `http://wiki.sagemath.org/padics`.

2.7 Ma mobilité d'une année au laboratoire Poncelet à Moscou

Du 1er octobre 2009 au 30 septembre 2010, j'ai bénéficié d'une mobilité d'une année au laboratoire Poncelet de Moscou (Russie). L'histoire a commencé lorsque Michel Balazard m'a contacté fin 2008 pour me proposer de partir un an avec lui là-bas. Bien que n'ayant alors aucune attache particulière en Russie, ne parlant pas du tout russe, qu'étant bien conscient que Moscou n'était pas l'endroit où la géométrie arithmétique et les nombres p-adiques étaient le plus étudiés, j'ai été assez vite séduit par la proposition de mon collègue qui, si elle aboutissait, allait certainement me faire découvrir de nouvelles mathématiques, de nouvelles façons de les aborder, et également un nouveau pays. J'ai donc rapidement accepté son offre et, ensemble, nous avons candidaté auprès du CNRS pour cette demande de mobilité, qui fut bientôt accepté.

[8]Dans le sens de la réduction des matrices

[9]Et en particulier les lecteurs de ces lignes...

Au mois d'octobre 2009, je partais donc en Russie m'installer dans mon nouveau laboratoire, le laboratoire franco-russe Poncelet situé au cœur de Moscou à l'université indépendante. L'accueil fut très chaleureux et mon intégration dans les diverses de l'équipe immédiate. Comme je le savais déjà, la théorie de Hodge p-adique n'était pas représentée dans ma nouvelle équipe, et ce n'était pas le plus important pour moi : je pouvais facilement continuer à discuter avec mes collaborateurs habituels par courrier électronique (et même, éventuellement, passer les voir lorsque le besoin s'en faisait sentir), tandis que je m'ouvrais en même temps à un grand nombre de nouveaux sujets tournant principalement autour de la théorie analytique des nombres et notamment des fonctions ζ. Au premier semestre, je suivais même un cours (en russe !) sur la question.

Les échanges se faisaient bien sûr de même dans le sens contraire ; avec des collègues, par exemple, nous avons décidé d'animer un groupe de travail sur les premiers travaux de Breuil concernant la correspondance de Langlands p-adiques. Il s'agissait de fait d'un sujet plutôt proche de mes centres d'intérêt, mais que je n'avais pourtant jamais réellement étudié sérieusement. Cela était donc également pour moi l'occasion de faire des mathématiques nouvelles, et d'autant plus sérieusement que j'étais supposé établir le programme du groupe de travail et donner plusieurs exposés. Ce groupe de travail fut aussi pour moi l'occasion de rencontrer Serguey Gorchinsky (dont j'ai déjà parlé précédemment) et de discuter à de nombreuses reprises avec lui. C'est souvent dans ces discussions que j'ai puisé la force et le courage de terminer d'écrire la théorie des (ϕ, τ)-modules.

J'ai participé également à l'enseignement à l'université indépendante de Moscou, puisque j'ai donné un cours sur les corps locaux (en suivant d'assez près la première partie du livre de Serre du même nom) au second semestre. J'ai également tapé des notes de cours en russe, que je suis encore en train de relire et de corriger.

Enfin, j'ai eu l'occasion de pouvoir réunir des mathématiciens français et russes en organisant une conférence à Moscou intitulée *Arithmétique et algorithmique* dans laquelle, en outre, les questions relatives au projet CETHop ont trouvé une place importante. Il me faut quand même dire que la fête a malheureusement été un peu gâchée à cause de problèmes de visas puisque trois orateurs n'ont finalement pas réussi à venir en Russie !

Comme vous l'aurez sans doute compris à la lecture de ce qui précède, mon année en Russie a été aussi une expérience linguistique. Bien que tous les mathématiciens du laboratoire Poncelet parlent anglais — et même que la plupart d'entre eux parlent français ! —, je voulais faire l'effort d'apprendre le russe. J'ai commencé en janvier 2009, quelques mois avant de partir pour Moscou, et je continue à poursuivre mon effort (malgré mon retour en France) avec malheureusement un succès qui n'est pas toujours à la hauteur de mes attentes. J'ai toutefois un niveau suffisant pour me débrouiller dans cette langue, aussi bien sur le plan de la vie de tous les jours que sur celui des mathématiques. Je suis encore très loin par contre de parler et d'écrire couramment.

A.3 ENSEIGNEMENT, FORMATION ET DIFFUSION DE LA CULTURE SCIENTIFIQUE

Enseignement

Dans le cadre de la préparation à l'agrégation proposée par l'UFR de mathématiques de l'université de Rennes 1, j'interviens chaque année quelques heures pour encadrer des leçons d'oral.

J'ai donné en 2009 un cours de 12 heures, pour jeunes doctorants, à l'Université de Rennes 1, intitulé « Aspects algébriques de la théorie de Hodge p-adique ». Des notes de ce cours sont disponibles sur ma page web.

Au début de l'année 2010, j'ai donné un cours à l'Université Indépendante de Moscou, portant sur le corps des nombres p-adiques et ses extensions algébriques. Des notes de ce cours (en russe) sont en cours de rédaction et seront bientôt disponibles sur ma page web.

Encadrement de stages

Voici la liste des stages que j'ai encadrés depuis mon entrée au CNRS :

– Un stage de fin de L3 avec David Pigeon (un élève magistérien de l'École normale supérieure de Lyon) sur le thème de la répartition des nombres premiers ; ce stage a donné lieu à une publication [20] dans la RMS.
– Un stage de TER (niveau M1) avec Anne Gobillot et Noémie Crétois-Payre sur le théorème de Poncelet.
– Un deuxième stage de TER (niveau M1) avec Thomas Homshaw sur l'irrationalité de $\zeta(3)$, et plus généralement sur celle des $\zeta(2n+1)$.
– Un stage de M2 avec Jérémy Le Borgne sur le théorème d'Ax-Sen-Tate ; nous avons étudié la démonstration d'Ax, puis celle de Tate.

Diffusion de la connaissance

Sous forme audiovisuelle

Avec Jos Leys, nous avons réalisé en 2009 un film d'animation d'une demi-heure intitulé « Mais où est donc le petit côté ? » dans lequel trois effets d'optique liés à la réfraction de la lumière sont expliqués.

Ce film est disponible gratuitement sur ma page web. Il a par ailleurs été projeté à l'occasion du Festival des Sciences à Rennes Métropole en octobre 2010. Plusieurs professeurs de lycée m'ont également écrit pour me féliciter pour ce film et me faire savoir qu'il l'utilisait comme document pédagogique pour leur cours.

Sous forme ludique

Avec Sandrine Caruso, nous avons créé et fabriqué un support pour une activité ludique mathématique s'adressant aux jeunes enfants, le but étant de réaliser une broderie en respectant les règles du point de croix et en minimisant la longueur de fil utilisé. À nouveau dans le cadre du Festival des Sciences 2010, nous avons proposé cette activité à une classe de CM2.

Sous forme d'articles

Je publie régulièrement des articles dans la révue Quadrature ou dans la RMS (Revue de Mathématiques Spéciales), revue destinée aux professeurs de classes préparatoires. On pourra consulter une liste de ces articles dans la bibliographie.

Depuis deux ans, je suis billetiste pour le site « Images des Mathématiques »[10], site destiné au grand public. J'ai écrit à cette occasion 19 billets.

Sous forme orale

À trois reprises, j'ai participé à l'accueil d'un jeune collégien qui avait choisi notre laboratoire de mathématiques pour son stage en entreprise obligatoire pendant l'année de troisième.

Pour la fête de la science à Rennes en 2009, j'ai participé pendant une demi-journée à l'animation du stand de notre laboratoire de mathématiques.

En octobre 2009 (juste avant de partir à Moscou), j'ai donné un exposé grand public d'une heure sur le grand théorème de Fermat, encore dans le cadre du Festival des Sciences. Cet exposé a été suivi d'une discussion avec le public portant à la fois sur mon intervention et plus généralement sur la place des mathématiques et de la recherche dans le monde aujourd'hui.

Olympiades de mathématiques

Je participe régulièrement (une à deux semaines, une à deux fois par an), comme encadrant et professeur, à des stages de préparation aux olympiades internationales de mathématiques organisés soit par l'association Animath, soit par l'OFM (Olympiade française de mathématiques).

En outre, j'ai accompagné la délégation française aux Olympiades internationales de mathématiques au Vietnam en août 2007 et aux Olympiades balkaniques de mathématiques en Serbie en juillet 2009.

[10] `http://images.math.cnrs.fr/`

A.4 Transfert technologique, relations industrielles et valorisation

A.5 Encadrement, animation et management de la recherche

Organisation de séminaires, rencontres et conférences

De 2006 à 2009, j'ai été l'organisateur — et préalablement l'initiateur — d'un *séminaire interne* à l'Université de Rennes 1 qui se réunit une fois par semaine (le mercredi). L'objectif initial était que chaque membre de notre équipe expose à tour de rôle devant ses collègues les thèmes principaux de sa recherche. Le séminaire qui touchait à l'origine seulement l'équipe de géométrie algébrique s'est ouvert en 2007 à l'ensemble des trois équipes de géométrie, et a marqué la première étape concrète du rapprochement de nos équipes suggérée lors de la précédente évaluation quadriennale. Le séminaire continue de prospérer et s'appelle désormais le *séminaire de géométrie*.

Depuis septembre 2009, je suis coordinateur du projet ANR *Calculs Effectifs en Théorie de Hodge p-adique (CETHop)* (voir `http://cethop.math.cnrs.fr/`). À cette occasion, j'ai organisé une réunion de mise en route du projet à l'Université de Rennes en décembre 2009, et une conférence à Moscou en juin 2010 (voir `http://www.mccme.ru/lifr/zykin/fr/arithalgo/index.html`).

Depuis septembre 2010, je suis co-organisateur des *Journées Louis Antoine* (voir `http://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/LA.html`).

Direction de thèse

Depuis le mois de septembre 2009, j'encadre avec David Lubicz la thèse de Jérémy Le Borgne intitulée « Méthodes algorithmiques pour la théorie de Hogde p-adique ».

Bibliographie

Mes publications et prépublications depuis 4 ans

Prépublications

[1] X. Caruso, *Représentations p-adiques et (φ, τ)-modules*, preprint (2010), 43 pages

[2] X. Caruso, *Estimation des dimensions de certaines variétés de Kisin* preprint (2010), 53 pages

[3] X. Caruso, *Dimension de certaines variétés de Deligne-Lusztig affines généralisées* preprint (2008), 12 pages

[4] X. Caruso, *Schémas en groupes et poids de Diamond-Serre*, preprint (2007), 9 pages

Revues à comité de lecture

[5] X. Caruso, *$\mathbb{F}_p$-représentations semi-stables*, à paraître dans Ann. Institut Fourier,

[6] X. Caruso, T. Liu, *Some bounds for ramification of p^n-torsion semi-stable representations*, J. Algebra **325** (2011), 70–96

[7] X. Caruso, *Classification of integral models of $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})_K$ via Breuil-Kisin theory*, J. Algebra **323** (2010), 1953–1957

[8] X. Caruso, D. Savitt, *Poids de l'inertie modérée de certaines représentations cristallines*, J. Théor. Nombres Bordeaux **22** (2010), 79–96

[9] X. Caruso, *Sur la classification de quelques ϕ-modules simples*, Mosc. Math. J. **9** (2009), 562–568

[10] X. Caruso, T. Liu, *Quasi-semi-stable representations*, Bull. Soc. Math. France **137** (2009), 185–223

[11] X. Caruso, D. Savitt, *Polygônes de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables*, Math. Ann. **343** (2009), 773–789

[12] X. Caruso, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, Invent. math. **171** (2008), 629–699

Actes de colloque à comité de lecture

[13] X. Caruso, *Bounding Galois action on semi-stable representations*, Oberwolfach Report **30**, 1709–1712

Articles de diffusion de la connaissance

Articles destinés à des mathématiciens

[14] X. Caruso, I. Kortchemski, *Statistiques du nombre de records d'une permutation*, à paraître dans la RMS

[15] X. Caruso, S. Caruso *Combinatoire du point de croix*, à paraître dans la RMS

[16] X. Caruso, *Une incarnation peu connue du corps des nombres réels*, RMS **119-4** (2009)

[17] X. Caruso, *Autour de l'hypothèse du continu : construction de* $\aleph_1$, Quadrature **73** (2009), 16–19

[18] X. Caruso, *Constructions à la règle courte et au compas à ouverture limitée*, RMS **119-2** (2009), 7–13

[19] X. Caruso, *Trisection de l'angle et duplication du cube*, RMS **118-4** (2008), 24–28

[20] X. Caruso, D. Pigeon, *Autour du théorème des nombres premiers*, RMS **118-3** (2008), 3–15

[21] X. Caruso, *Quelques identités combinatoires en faveur de l'existence du corps à un élément* RMS **117-1** (2006), 36–44

[22] X. Caruso, *Nombre d'or et tournesol* RMS **116-4** (2006), 7–23

Articles destinés au large public

[23] X. Caruso, *Un problème de remplissage de verres*, Images des Mathématiques, CNRS (2009)

[24] X. Caruso, P. Bornsztein, *Au cœur des Olympiades Internationales de Mathématiques*, Quadrature **71** (2009), 31–44

Autres références utilisées dans le document

[25] V. Abrashkin, *Ramification in étale cohomology*, Invent. Math. **101** (1990), no. 3, 631–640

[26] C. Breuil, *Construction de représentations* p*-adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327

[27] C. Breuil, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. math. **136** (1999), 89–122

[28] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas* $er < p - 1$, J. reine angew. Math. **594** (2006), 35–92

[29] J.-M. Fontaine, *Il n'y a pas de variété abélienne sur* $\mathbb{Z}$, Invent. Math. **81** (1985), 515–538

[30] J.-M. Fontaine, *Schémas propres et lisses sur* $\mathbb{Z}$, in *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry (Bombay, 1989)*, 43–56, 1993

[31] T. Gee, *On the weights of mod* p *Hilbert modular forms*, preprint (2008), 27 pages

[32] E. Hellmann, *On the structure of some moduli spaces of finite flat group schemes* preprint (2008), 27 pages

[33] M. Kisin, *Crystalline representations and* F*-crystals*, Algebraic Geometry and Number Theory, Drinfeld 50th Birthday volume, 459–496

[34] M. Kisin, *Moduli of finite flat group schemes, and modularity*, Ann. of Math. **170** (2009), 1085–1180

[35] T. Liu, *Torsion p-adic Galois representation and a conjecture of Fontaine*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **40** (2007), 633–674

[36] T. Liu, *Lattices in semi-stable representations : proof of a conjecture of Breuil*, Compositio Math. **144** (2008), 61–88

[37] T. Liu, *A note on lattices in semi-stable representations*, Math. Annalen **346** (2010), 117–138

[38] D. Monniaux. *A quantifier elimination algorithm for linear real arithmetic*, in LPAR (Logic for Programming Artificial Intelligence and Reasoning), Lecture Notes in Computer Science **5330**, pp. 243–257.

[39] G. Pappas, M. Rapoport, Φ*-modules and coefficient spaces*, Mosc. Math. J. **9** (2009), pp. 625–663

[40] E. Viehmann, *The dimension of some affine Deligne-Lusztig varieties*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **39** (2006), pp. 513–526

[41] J. P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. math. **15** (1972), 259–331

B – Objectifs

B.1 MES OBJECTIFS DE RECHERCHE

1.1 Dans la continuité de mes précédents travaux

Une majorité des articles que j'ai rédigés durant ces quatre années se concluent par un nombre plus ou moins important de questions ou conjectures en lien avec la problématique étudiée. La plupart de ces énoncés n'ayant pas encore été résolu, j'ai certainement pour projet de m'y attaquer durant les prochaines années. Voici ci-après un panorama de ces questions (qui ne prétend pas à l'exhaustivité).

1.1.1 Les variétés de Kisin

Plusieurs questions se posent naturellement à la suite de mon travail sur les variétés de Kisin. La plus évidente d'entre elles est celle du calcul exact des dimensions des variétés de Kisin dans une plus grande généralité. Une façon d'obtenir une idée générale sur le comportement attendue de ces dimensions est de jeter un œil aux résultats dejà connus concernant les variétés de Deligne-Lusztig affines qui ont des chances de se comporter de façon similaire aux variétés de Kisin. Or, dans le cas Deligne-Lusztig, en reprenant les notations du paragraphe A.2.5, on sait que la dimension s'obtient comme la somme de $\frac{1}{2} \langle \mu | \rho \rangle_d$ (où ρ est la demi-somme des racines positives du groupe en question) et d'un terme correctif complémentaire dont la définition est plus délicate. Il paraît clair que l'estimation donnée par le théorème 23 correspond au terme principal. Il reste donc à comprendre quel est l'équivalent du terme correctif dans le contexte des variétés de Kisin. Je n'ai encore aucune idée quant à la réponse, mais un point de départ qui me semble inévitable est d'étudier en détails la structure du terme correctif dans le cas des variétés de Deligne-Lusztig.

Une autre remarque intéressante est que le théorème 23 semble donner les clés pour une vaste généralisation. Pour l'expliquer, il me faut d'abord dire que la variété $\mathcal{X}_\mu^M$ peut se définir complètement en termes de théorie de groupes. Brièvement, si l'on fixe $(e_1, \dots, e_d)$ une base de M (par exemple une base sur laquelle le Frobenius agit trivialement) la donnée d'un réseau $\mathfrak{M}$ correspond à la donnée d'un élément du quotient $\mathrm{GL}_d(k((u)))/\mathrm{GL}_d(k[[u]])$ (pour l'action par multiplication à gauche) et les contraintes faisant intervenir les diviseurs élémentaires signifient simplement que l'on peut choisir un représentant dans $\mathrm{GL}_d(k((u)))$ de la forme $\mathrm{Diag}(u^{\mu_1}, \dots, u^{\mu_d}) \cdot A$ où Diag dénote la matrice diagonale dont les entrées non nulles sont listés dans la parenthèse qui suit, et où A est une matrice à coefficients dans $\mathrm{GL}_d(k[[u]])$. Nobostant un peu de théorie des groupes algébriques, il est possible d'étendre cette définition à n'importe quel groupe réductif connexe G et de définir ainsi des variétés $\mathcal{X}_\mu^{G,M}$ où M est maintenant un élément de $G(k((u)))$ et μ un copoids dominant. Par ailleurs, sans s'encombrer des détails, le théorème 23 dit que, sous certaines hypothèses, on a l'approximation :

$$\dim_k \mathcal{X}_\mu^M \simeq (p-1) \cdot \min_{w \in \mathfrak{S}_d} \sum_{i=1}^{d} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_i \cdot \frac{d+1-i-w^n(i)}{p^n}$$

lorsque M est le ϕ-module trivial de dimension d. Or, l'ensemble $\mathfrak{S}_d$ qui apparaît ici n'est autre que le groupe de Weyl de GL_d, ce qui laisse présager que la formule puisse se généraliser, elle aussi, à d'autres groupes. Par ailleurs, un calcul montre que la quantité à l'intérieur du $\min$ s'exprime elle aussi en termes du système de racines de GL_d : précisément, elle s'écrit comme le produit scalaire du vecteur μ par $((p-1)^{-1} + (pw-1)^{-1})(\rho)$ où ρ désigne à nouveau la demi-somme des racines positives. Forts de ces remarques, j'ai émis dans [2] une conjecture pour cette situation plus générale (voir conjecture 4.6). Celle-ci me paraît intéressante, en particulier car elle s'applique aux groupes $\mathrm{Res}_{\ell/k}\mathrm{GL}_d$ (où ℓ est une extension finie de k et Res désigne la restriction des scalaires à la Weil) qui jouent, eux aussi, un rôle important pour les problèmes de modularité étudiés par Kisin. D'autres généralisations éventuelles sont également proposées dans *loc. cit.*, et un de mes projets à moyen terme est de reprendre ce travail dans un contexte plus général.

1.1.2 Les (ϕ, τ)-modules

De même que la catégorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine, la catégorie des (ϕ, τ)-modules que j'ai introduite est équivalente à celle des représentations galoisiennes de G_K. Ainsi ces deux catégories équivalentes entre elles. Expliciter cette équivalence sans passer par les représentations de G_K me semble une question naturelle et intéressante. Elle pourrait permettre en particulier de faire explicitement le lien avec la théorie de Berger, et aussi de mieux comprendre les liens entre les différentes catégories de (ϕ, τ)-modules que l'on obtient en faisant varier l'uniformisante π, la famille des π_n, ou encore l'élément τ et, par voie de conséquence, de supprimer l'hypothèse $W[1/p][\pi^p] = K$ qui apparaît dans la proposition 19.

Une autre question, encore inspirée par le parallèle avec les (φ, Γ)-modules, est la surconvergence (dans le sens de Cherbonnier et Colmez) des (ϕ, τ)-modules. On sait déjà que tout (ϕ, τ)-module correspondant à un représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate positifs ou nuls est défini sur l'anneau $\mathfrak{S}$, ce qui implique notamment sa surconvergence (il est même convergent sur tout le disque unité ouvert). Par contre, pour les autres représentations, et déjà les plus simples comme par exemple $\mathbb{Q}_p(-1)$, la question reste ouverte.

Dans un article en commun avec Tong Liu, nous avons posé un certain nombre de questions sur la possibilité de relever en caractéristique nulle des représentations galoisiennes de torsion. Typiquement, étant donnée une $\mathbb{F}_p$-représentation $\bar{T}$ de G_K, nous demandons s'il existe un réseau T dans une représentation cristalline (resp. semi-stable), dont les poids de Hodge-Tate sont éventuellement fixés, et un morphisme surjectif $T \to \bar{T}$. La théorie des (ϕ, τ)-modules me semble être une approche tout à fait appropriée pour aborder ce type de problèmes (au moins dans le cas des représentations semi-stables) puisqu'elle permet à la fois de décrire les représentations libres et de torsion, et de reconnaître de façon particulièrement simple les réseaux dans les représentations semi-stables.

1.1.3 La correspondance de Langlands p-adique

Comme je l'ai déjà mentionné en A.2.7, j'ai animé durant mon année en Russie un groupe de travail sur les premiers travaux de Breuil sur la correspondance de Langlands p-adique. Cette année, de retour à Rennes, aidé par le recrutement récent de Yongquan Hu, je continue à me tenir informé sur le sujet puisque nous avons un nouveau groupe de travail qui porte sur la construction récente par Colmez de foncteurs réalisant la correspondance entre représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations de dimension 2 du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$.

Bien que je n'envisage pas de m'investir à temps plein dans ce nouveau sujet, il est possible que j'y aventure quelque peu lors de mes futures recherches. Notamment, j'aimerais explorer un instant la possibilité d'adapter les articles de Colmez en remplaçant les (φ, Γ)-modules par des (ϕ, τ)-modules, et étudier en particulier dans quelle mesure cela pourrait permettre de mieux comprendre (voire de simplifier ou d'étendre à d'autres situations) certaines étapes de la construction de Colmez. Ce projet est encore trop frais dans ma tête, mais je suis persuadé qu'il saura murir sereinement, notamment aux côtés de Lionel Fourquaux qui a travaillé et travaille encore sur des questions similaires sauf qu'il ne considère pas de son côté l'extension K_∞ de Breuil-Kisin, mais une extension de Lubin-Tate.

1.2 En lien avec le projet CETHop

En réalité, bien que les problématiques qui viennent d'être présentées m'intéressent réellement et que je compte certainement y consacrer du temps, je ne souhaite pas en faire ma priorité pour les quatre années à venir. J'ai, au contraire, plutôt envie de me consacrer à des questions de nature plus algorithmique en lien avec le projet CETHop. Ci-dessous, j'aimerais présenter deux d'entre elles, en les agrémentant chacune de mes premières pistes et réflexions.

1.2.1 La gestion de la précision lors des calculs sur les p-adiques

Il est presque de notoriété publique que le caractère ultramétrique des normes sur les ensembles de nombres p-adiques a pour conséquence de faciliter grandement l'estimation des erreurs : lorsque l'on effectue plusieurs opérations à la suite, les erreurs (les erreurs d'arrondi typiquement) ne s'ajoutent pas comme avec les nombres réels. Par exemple si l'on sait que $x = 1 + O(p)$ — la notation $O(p)$ signifie que les chiffres de x (écrit en base p) à partir de p-aines ne sont pas connus ; ainsi $x = 1 + O(p)$ veut simplement dire $x \equiv 1 \pmod p$ — et que $y = 2 + O(p)$, alors on en déduit que $x + y = 3 + O(p)$ et $xy = 2 + O(p)$;

autrement dit, on connaît toujours autant de chiffres significatifs. Voici maintenant une autre situation, à première vue assez similaire, mais pour laquelle nous allons voir poindre un petit problème si l'on s'y prend trop naïvement. On considère

$$x = 1 + O(p) \quad \text{et} \quad y = p + O(p^2). \tag{4}$$

Ce sont deux éléments de $\mathbb{Q}_p$ connus à des précisions différentes. On se propose de calculer simplement $x + y$ et $x - y$; bien sûr, on trouve $x + y = 1 + O(p)$ et $x - y = 1 + O(p)$. Si maitenant, en supposant $p \neq 2$ pour simplifer, on souhaite retrouver x et y à partir des deux résultats précédents, on obtient $x = \frac{(x+y)+(x-y)}{2} = 1 + O(p)$ et $y = \frac{(x+y)-(x-y)}{2} = O(p)$. On voit ainsi que l'on ne retrouve pas pour y la précision que l'on avait au départ. Évidemment, rien de tout cela n'est surprenant, mais le fait est que l'on peut facilement éviter ce désagrément en travaillant avec le couple (x, y) plutôt qu'avec les éléments x et y séparément. Précisément, on introduit le $\mathbb{Z}_p$-réseau H de $\mathbb{Q}_p^2$ engendré par les vecteurs $(p, 0)$ et $(0, p^2)$. L'équation (4) s'écrit alors, avec des notations transparentes, $(x, y) = (1, p) + O(H)$ et, en appliquant la fonction $f : \mathbb{Q}_p^2 \to \mathbb{Q}_p^2$, $(u, v) \mapsto (u + v, u - v)$ à cette égalité, on obtient

$$(x + y, x - y) = (1 + p, 1 - p) + O(f(H)) \tag{5}$$

et $f(H)$ est le réseau engendré par les vecteurs (p, p) et $(p^2, -p^2)$. Bien sûr, maintenant, en appliquant f^{-1} à ce que l'on vient de trouver, on retombe bien sur $(x, y) = (1, p) + O(H)$, c'est-à-dire les précisions initiales. Par ailleurs, du fait que le réseau $f(H)$ n'est pas engendré par une famille de deux vecteurs de la forme $(a, 0)$ et $(0, b)$, il n'est pas possible de séparer l'égalité (5) en deux égalités portant séparément sur $x + y$ et $x - y$.

Cet exemple incite, de façon plus générale, à ne pas travailler avec une précision associée individuellement à chaque élément, mais plutôt avec une donnée de précision générale. La question se pose alors de savoir quelle doit être la forme de cette donnée. Pour l'exemple précédent, le choix d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau était particulièrement adapté à cause de la linéarité de f. La proposition suivante (facile) montre que, même dans un cas beaucoup plus général, les réseaux continuent de jouïr de propriétés agréables en lien avec les questions de précision.

Proposition 24. *Soient n et m des entiers et $f : \mathbb{Q}_p^n \to \mathbb{Q}_p^m$ une fonction. On suppose que f est différentiable en un point $x \in \mathbb{Q}_p^n$ et que la différentielle df_x en ce point est surjective. Alors pour tout $\mathbb{Z}_p$-réseau $H \subset \mathbb{Q}_p^n$, et pour tout entier k suffisamment grand (le « suffisamment » dépendant de H), on a l'égalité ensembliste*

$$f(x + p^k H) = f(x) + p^k df_x(H). \tag{6}$$

Autrement dit, sous les hypothèses de la proposition, si l'élément x est connu avec la précision H, alors son image par f est connue avec la précision $df_x(H)$, sous-ensemble de $\mathbb{Q}_p^m$ qui est encore un réseau d'après l'hypothèse de surjectivité faite sur df_x. J'aimerais insister en outre sur le fait que la formule (6) est bien une égalité — et pas seulement une inclusion —, ce qui signifie qu'en l'appliquant, on ne perd aucune précision.

Le résultat de la proposition précédente n'est malgré tout pas encore entièrement satisfaisant, et donne lieu à plusieurs problèmes qu'il reste encore à résoudre. Le premier d'entre eux est que je ne sais pour l'instant pas donner de conditions explicites sur k pour que l'égalité (6) soit satisfaite. Je sais toutefois répondre à cette question pour un certain nombre de fonctions usuelles f, comme par exemple $(x, y) \mapsto x + y$, $(x, y) \mapsto xy$, $x \mapsto \exp(x)$ ou même encore des expressions plus sophistiquées comme $M \mapsto \det M$ où M désigne une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$.

Le deuxième problème que j'aimerais évoquer est de nature plus pratique. Si l'on souhaite modéliser la précision à l'aide de réseaux et appliquer pour ce faire la formule (6), on est amené à calculer, pour chaque opération élémentaire (addition, multiplication, typiquement), l'image d'un réseau dans un espace de grande dimension (à savoir le nombre de variables que fait intervenir la situation) par une application linéaire. Bien qu'il existe des algorithmes efficaces pour cela, il ne fait aucun doute que cela entraînera un surcout immense en complexité qui, la plupart du temps, ne sera pas acceptable. Il semble donc nécessaire de proposer des compromis entre la qualité du modèle de précision et la vitesse d'exécution de l'algorithmique correspondante.

Enfin, un dernier problème est que l'on aimerait pouvoir manipuler pas uniquement des éléments qui vivent dans des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}_p$, mais aussi dans des structures plus compliquées, comme des variétés (algébriques, rigides, *etc.*) définies sur $\mathbb{Q}_p$. Je pense tout particulièrement aux sous-espaces vectoriels qui définissent des points dans les grassmaniennes. Étendre la notion de précision à de telles structures et, avec elle, la proposition 24 aux variétés semble donc un enjeu important.

1.2.2 Le calcul de réseaux dans les représentations semi-stables

Soit V une représentation semi-stable de G_K à poids de Hodge-Tate positifs ou nuls. Le problème que j'aimerais aborder dans ce paragraphe est le calcul d'un $\mathbb{Z}_p$-réseau T de V stable par l'action de Galois. On sait, par un argument de compacité classique, qu'un tel réseau existe toujours, mais en déterminer explicitement un est en général autrement plus difficile. Mon objectif est d'obtenir une solution algorithmique pour répondre à cette question, mais avant cela, il me faut expliquer comment on peut placer le problème que je viens de décrire dans ce contexte.

Plusieurs difficultés apparaissent tout de suite. Tout d'abord, une qui n'est pas vraiment spécifique à l'algorithmique est celle de la représentation des objets. Pour décrire la représentation semi-stable V de laquelle on part, je pense que le plus simple est de convenir que l'on se donne son (ϕ, N)-module filtré de Fontaine, que j'appelle D. Lorsque $r < p - 1$, on a un candidat qui s'impose pour représenter le réseau T : il s'agit de l'objet de $\mathrm{Mod}_{/S}^{r,\phi,N}$ qui lui correspond par la théorie de Breuil (voir paragraphe A.2.1.1 pour un rappel des définitions). Dans le cas général, il me paraît plus simple (en tout cas, au moins pour cette présentation) de modifier un peu le problème en demandant non pas de calculer T, mais l'objet $\mathfrak{M}$ de $\mathrm{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\infty,\phi}$ qui lui correspond par la théorie de Kisin[11]. Les difficultés algorithmiques sont, quant à elles, principalement liées à la précision : si l'on veut avoir un bon contrôle de celle-ci, la proposition 24 (ou plutôt une variante) nous dit qu'en plus de la fonction

$$R : \left\{ (\phi, N)\text{-modules filtrés admissibles effectifs}^{12} \right\} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{/\mathfrak{S}}^{\infty,\phi}, \quad D \mapsto \mathfrak{M},$$

il va nous falloir calculer l'image d'un réseau par sa différentielle au point considéré (pour peu que cela ait un sens), et donc en particulier cette différentielle.

Il est maintenant temps d'expliquer comment l'on peut calculer — ou disons, plutôt simplement définir, ce sera plus exact — la fonction R. On procède en deux étapes : on calcule d'abord $M = \mathfrak{M}[1/p]$ en utilisant des formules explicites que l'on trouve dans la littérature, puis on en déduit $\mathfrak{M}$ en utilisant le fait que si les poids de Hodge-Tate de V sont dans $\{0, \dots, r\}$, alors

$$E(u)^r \mathfrak{M} \subset \langle \phi(\mathfrak{M}) \rangle \tag{7}$$

où, par définition, $\langle \phi(\mathfrak{M}) \rangle$ est le $\mathfrak{S}$-module engendré par $\phi(\mathfrak{M})$. Concrètement, pour calculer $\mathfrak{M}$ connaissant M, voici comment l'on peut procéder. On choisit n'importe quel $\mathfrak{S}$-réseau $\mathfrak{M}_0$ stable par ϕ à l'intérieur de M et on définit par récurrence les modules $\mathfrak{M}_i$ grâce à la formule :

$$\mathfrak{M}_{i+1} = \left\{ x \in \mathfrak{M}_i \,|\, E(u)^r x \in \langle \phi(\mathfrak{M}_i) \rangle \right\}.$$

Les $\mathfrak{M}_i$ forment une suite décroissante et leur limite $\mathfrak{M} = \bigcap_{i \geqslant 0} \mathfrak{M}_i$ vérifie la condition (7) ce qui suffit à assurer que $\mathfrak{M}$ apparaît correspond *via* la théorie de Kisin à un réseau T de V. Ce réseau n'est *a priori* stable que par le sous-groupe G_∞, mais si on choisit $\mathfrak{M}_0$ avec un peu d'attention, il est en fait bien stable par tout G_K, et on a ainsi obtenu une construction explicite de R.

Pour transformer en véritable algorithme opérationnel le baratin précédent, il reste encore au moins trois problèmes à résoudre, à savoir :

- étudier les formules explicites de la littérature pour le calcul de $M = \mathfrak{M}[1/p]$ et s'assurer qu'elles peuvent être implémentées sur machine,
- calculer, ou en tout cas estimer, la différentielle de la fonction R afin d'avoir un contrôle sur la précision, et
- déterminer à quelle indice on peut s'arrêter (si possible de façon explicite) pour calcul de l'intersection infinie $\bigcap_{i \geqslant 0} \mathfrak{M}_i$.

En réalité, régler le problème de précision risque d'être encore plus complexe qu'il n'y paraît car l'ensemble des (ϕ, N)-modules filtrés admissibles effectifs ne forme pas un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, et la proposition 24 ne peut donc pas s'appliquer directement. Il faut donc en outre, en guise de préliminaire, comprendre comment cette proposition s'étend dans la situation présente... et espérer que cette extension ne demande pas de calculer d'objets nettement plus complexes qu'une différentielle. Par ailleurs, j'aimerais conclure en insistant sur le fait qu'il ne me semble pas du tout raisonnable de faire l'économie de la

[11] Cela est certes un peu moins précis, mais la plupart des difficultés apparaissent déjà dans cette situation. Dans tous les cas, on peut retrouver T en ajoutant partout un opérateur τ ou, au choix, N_∇, comme cela est expliqué à la fin du paragraphe A.2.4

[12] Cela signifie que $\mathrm{Fil}^0 D = D$ et correspond à la condition de positivité sur les poids de Hodge-Tate.

précision. Par exemple, encore plus que T, on peut avoir envie de calculer seulement la semi-simplifiée de T/pT (qui ne dépend que de V, par un résultat de Brauer-Nesbitt). Le résultat est alors une valeur exacte, et on a certainement envie de savoir à quelle précision il est nécessaire de connaître la donnée initiale D pour l'obtenir.

B.2 MES AUTRES OBJECTIFS

J'ai aussi un certain nombre projets liés à la diffusion de la connaissance scientifique. Voici, en quelques mots, les deux principaux.

2.1 Le séminaire *Mathematic Park*

J'ai pour projet (presque concrétisé) de mettre en place à partir du mois de février 2011, un nouveau séminaire qui devrait se réunir toutes les deux semaines à l'IHP. Le but de ce séminaire serait de proposer à des élèves de licence et de classes préparatoires des minis-cours sur des sujets mathématiques variés. Il est pour l'instant prévu que chaque séance dure 1h30 (un mini-cours pouvant s'étaler sur deux ou trois séances) et soit suivie d'un thé/goûter qui devrait permettre de favoriser les échanges entre chercheurs et jeunes étudiants.

Le nom du séminaire envisagé, *Mathematic Park*, est bien entendu une allusion au film *Jurassic Park* : l'idée est de faire un parallèle entre le séminaire et une sorte de parc où l'on exposerait non pas des dinosaures, mais des mathématiques. Il reste encore à voir si cela sera aussi dangeureux.

2.2 Un deuxième film

Ayant beaucoup aimé ma première expérience cinématographique (avec le film *Mais où est donc le petit côté ?* réalisé avec Jos Leys), l'envie me revient de plus en plus de recommencer l'aventure. En outre, j'ai récemment pensé à un sujet qui me semble parfaitement d'actualité : il s'agit de la 3D, dont on ne peut pas nier l'importance qu'elle prend en ce moment dans le cinéma. Plus précisément, mon idée serait de réaliser un film (si possible en 3D) pour expliquer dans les grandes lignes les principes sous-jacents à la réalisation des films 3D. Il est à noter que, pour ce faire, une certaine quantité de matériel issue du film sur le petit côté pourra très probablement être réutilisée.