Rapport d'activités de X. Caruso

Période : décembre 2006 — décembre 2008

Avant-propos

Monsieur le président de la section 1,

En avant-propos de ce rapport, je tiens à vous dire que je m'oppose totalement, comme beaucoup de mes collègues, à la potitique menée actuellement par le gouvernement en terme d'enseignement et de recherche. Je me joins notamment entièrement au mouvement actuel des enseignants-chercheurs et soutiens toutes leurs revendications. Afin de garantir l'indépendance de la recherche, de préparer l'avenir, de limiter la fuite des cerveaux, et d'éviter la longue période de précarité, je suis également tout à fait contre la transformation du CNRS en agence de moyens, comme cela a été annoncé par le Président de la République lors de son discours du 22 janvier 2009.

Au sujet de ce discours, je tiens aussi à vous dire que j'ai été profondément choqué par les propos calomnieux et mensongers de Nicolas Sarkozy. De ce point de vue, j'approuve complètement le texte voté à l'unanimité du Conseil scientifique de l'organisme qui, lui aussi, « s'indigne de l'énoncé de contre-vérités manifestes appuyées sur des éléments partiels et des erreurs concernant la recherche française, notamment en ce qui concerne son mode d'évaluation ». Je vous fais finalement savoir que j'ai signé la pétition `http://excuses-sarkozy.fr.nf/`.

A.1. Curriculum vitæ

Xavier Caruso
(né le 24 avril 1980 à Cannes)
IRMAR – Université Rennes 1
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex
Tél : 02 23 23 58 92
E-Mail : `xavier.caruso@normalesup.org`
Page web : `http://perso.univ-rennes1.fr/xavier.caruso/`
Marié, sans enfant

Parcours scolaire et professionnel.

2006– Chargé de recherche au CNRS affecté à l'Université de Rennes 1.

2005 Thèse sous la direction de Christophe Breuil intitulée *Conjecture de l'inertie modérée de Serre* et soutenue le 7 décembre devant le jury composé de Ahmed Abbes, Pierre Berthelot (rapporteur), Lawrence Breen, Christophe Breuil (directeur de thèse), Michel Raynaud. Autre rapporteur : Mark Kisin.

2004–2006 Participation en tant que tuteur au projet *Tutorat, élèves de Seine Saint-Denis.*

2003–2006 Moniteur à l'université Paris 13.

2000– Animation de stages de préparation aux olympiades internationales de mathématiques.

1999–2003 Élève de de l'École normale supérieure de Paris

Responsabilités.
2006– Organisation du séminaire interne des équipes de géométrie à l'université de Rennes 1.

2004–2006 Organisation du séminaire des doctorants de l'université Paris 13.

2003–2006 Organisation d'un groupe de travail pour brillants lycéens et élèves de prépa. (Voir `http://boumbo.toonywood.org/xavier/maths/mathematicpark.html`.)

2004–2006 Organisation (avec Farouk Boucekkine et François Gaudel) du projet *Tutorat, élèves de Seine Saint-Denis.*

2004– Membre du bureau de l'association Animath

Divers.
1997 Premier accessit au concours général de mathématiques.
Quatrième accessit au concours général de physique.
Participation aux olympiades internationales de mathématiques à Mar del Plata (Argentine). Obtention d'une *honourable mention.*

Langues : français (langue maternelle), anglais (parlé et écrit).

Loisirs : promenades, jeux de réflexion.

A.2. Recherche scientifique

Conformément à mon programme de recherche, l'essentiel de mon activité scientifique de recherche de ces deux dernières années a tourné autour de l'étude des représentations semi-stables de torsion, et apparaît ainsi comme un prolongement naturel de ma thèse. Toutefois, le hasard des rencontres m'a également permis de discuter d'une part avec Michaël Rapoport et d'autre part avec David Lubicz, discussions qui ont réorienté certains de mes intérêts sur des thèmes plus ou moins excentrés de mon sujet initial.

Ci-dessous, j'aimerais commencer par détailler mon activité de recherche « traditionnelle », puis montrer comment celle-ci a été ensuite influencée et élargie au gré des conversations évoquées précédemment. Mais avant tout, j'aimerais insister sur le fait que tous les travaux que je vais détailler dans la suite ont été l'occasion pour moi de nouer des liens étroits avec plusieurs chercheurs jeunes ou renommés, qui ont été fructueux et, je l'espère, continueront à l'être dans l'avenir.

Les représentations semi-stables de torsion en grande ramification. Il s'agit du sujet qui s'inscrit le plus directement dans la continuité des travaux que j'ai menés pendant ma thèse. Afin de présenter mes résultats avec un peu plus de précisions, j'ai besoin de faire au préalable quelques rappels sur la théorie de Breuil.

Rappel du contexte. Soient p un nombre premier et k un corps parfait de caractéristique p. On note W l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, K_0 son corps des fractions et σ le Frobenius sur ces deux anneaux. On fixe K une extension totalement ramifiée de K_0 de degré e, de polynôme d'Eisenstein $E(u)$ et d'uniformisante correspondante π. On appelle G_K le groupe de Galois absolu de K et on s'intéresse à la catégorie $\mathrm{Rep}^{\mathrm{tors}}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ (resp. $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$) dont les objets sont les $\mathbb{Z}_p$-représentations de type fini de G_K annulées par une puissance de p (resp. annulées par p). Afin d'étudier $\mathrm{Rep}^{\mathrm{tors}}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$, Breuil introduit pour tout entier $r \in \{0, \dots, p-1\}$, une catégorie d'objets d'algèbre linéaire, que l'on notera $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S}$ dans ce texte. Pour la définir, nous avons encore besoin de quelques notations : soit S le complété (pour la topologie p-adique) de l'enveloppe à puissances divisées de $W[u]$ relativement à l'idéal principal engendré par $E(u)$ et compatibles aux puissances divisées canoniques sur $pW[u]$; il est en muni de la filtration à puissances divisées notée $\mathrm{Fil}^t S$, d'un Frobenius $\phi : S \to S$

défini comme l'unique morphisme d'anneaux σ-semi-linéaire, continue tel que $\phi(u) = u^p$, et d'un opérateur de monodromie $N : S \to S$ défini par $s \mapsto -u\frac{ds}{du}$. Pour tout entier n, on pose $S_n = S/p^n S$. Un objet de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$ est alors la donnée de :

- un S-module $\mathcal{M}$ isomorphe à une somme directe finie de S_{n_i} (pour certains entiers n_i) ;
- un sous-module $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$ contenant $\mathrm{Fil}^r S\,\mathcal{M}$;
- un opérateur ϕ-semi-linéaire $\phi_r : \mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ (appelé Frobenius) vérifiant
$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r}\,\phi_r(s)\phi_r(E(u)^r x)$$
pour tous $s \in \mathrm{Fil}^r S$ et $x \in \mathcal{M}$;
- un opérateur (dit de monodromie) $N : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ vérifiant :
  - (condition de Leibniz) $N(sx) = N(s)x + sN(x)$ pour tout $s \in S$ et $x \in \mathcal{M}$;
  - (transversalité de Griffith) $E(u)N(\mathrm{Fil}^r\mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$;
  - le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] \arrow[d, "E(u)N"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "cN"] \\
\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} \arrow[r, "\phi_r"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

Les morphismes dans $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$ sont simplement les applications S-linéaires commutant à toutes les structures supplémentaires. Le lien avec les représentations galoisiennes se fait simplement grâce à un foncteur $T_{\mathrm{st}} : \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty} \to \mathrm{Rep}^{\mathrm{tors}}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$. Bien sûr, un souhait légitime est que cette association possède de bonnes propriétés ; dit de façon très informelle, on aimerait

(1) que les représentations atteintes par T_{st} contiennent une bonne partie des représentations d'origine géométrique (typiquement celles données par la cohomologie étale des variétés) et

(2) qu'il soit possible de faire des calculs sur ces représentations au niveau de la catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$ (*a priori* plus manipulable).

Lorsque $er < p - 1$, j'avais démontré dans ma thèse, suivant les travaux de Breuil valables dans le cas $e = 1$, que les deux espoirs précédents étaient réalisés. Comme dans la suite, j'aimerais essentiellement me concentrer sur le deuxième point, je ne contente de mentionner le résultat précis que j'avais obtenu à ce sujet, qui apparaît en fait comme un théorème de structure de la catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$.

Théorème 1 (voir [19], théorèmes 1.0.2 et 1.0.4)**.** *Supposons $er < p - 1$. Alors la catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$ est abélienne et le foncteur T_{st} est exact et pleinement fidèle. En outre, son image essentielle est stable par quotients et sous-objets.*

Supposons de plus k algébriquement clos. Soit $\mathcal{M}$ un objet simple de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$. *Alors, $\mathcal{M}$ est un S_1-module libre et il admet une base $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ dans laquelle les structures supplémentaires s'écrivent comme suit :*

- *(la filtration)* $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} = \sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} u^{n_i}e_i$ *où les n_i sont des éléments de $\{0,\dots,er\}$;*
- *(le Frobenius) $\phi_r(u^{n_i}e_i) = e_{i+1}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$;*
- *(la monodromie) $N(e_i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.*

À partir de ce théorème, un calcul assez simple permet de contrôler l'action de l'inertie modérée sur les réprésentations qui s'obtiennent *via* T_{st} à partir d'un objet de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$: précisément, on montre que leurs poids de l'inertie modérée sont toujours compris entre 0 et er (voir [19], théorème 1.0.3). En vertu du point (1) (que je n'ai pas détailler), ceci s'applique à certains groupes de cohomologie étale p-adique, et donne ainsi une application intéressante de la théorie.

La génèse de la théorie en grande ramification. Le point de départ de ma réflexion a été la volonté de comprendre la structure de la catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$ dans le cas général, c'est-à-dire sans l'hypothèse $er < p - 1$. À première vue, cela pouvait paraître un peu périlleux, car on savait déjà bien que deux des résultats fondamentaux qui apparaissent dans le théorème 1, à savoir le caractère abélien de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$ et la pleine fidélité de T_{st}, deviennent faux si l'hypothèse $er < p - 1$ est ôtée. Le contre-exemple est classique mais j'aimerais le répéter ici, car il a été pour moi une source d'inspiration importante. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ les deux objets de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$ (on suppose $er \geqslant p - 1$) définis par les formules suivantes :

$$\mathcal{M} = S_1, \quad \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} = \mathcal{M}, \quad \phi_r(1) = 1, \quad N(1) = 0,$$

$$\mathcal{M}' = S_1, \quad \mathrm{Fil}^r \mathcal{M}' = u^{p-1}\mathcal{M}', \quad \phi_r(u^{p-1}) = 1, \quad N(1) = 0,$$

et soit $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ l'application S-linéaire donnée par $f(1) = u^p$. On vérifie directement que f est compatible à toutes les structures supplémentaires, et donc est un morphisme de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$. Clairement, il n'est pas bijectif, mais pourtant on peut montrer que c'est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme, ce qui ne saurait arriver dans une catégorie abélienne. Par ailleurs, un autre petit calcul assure que $T_{\mathrm{st}}(f)$ est, lui, un isomorphisme, ce qui met en défaut la pleine fidélité de T_{st}. Très tôt, j'ai eu l'intuition qu'il s'agissait là essentiellement du seul problème, ce qui m'a poussé à émettre la conjecture suivante : si $\mathcal{C}_\infty$ désigne la catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$ dans laquelle on a inversé formellement tous les morphismes f pour lesquels $T_{\mathrm{st}}(f)$ est un isomorphisme, alors $\mathcal{C}_\infty$ est abélienne, et le foncteur $\mathcal{C}_\infty \to \mathrm{Rep}^{\mathrm{tors}}_{\mathbb{Z}_p}(G_K)$ est pleinement fidèle. L'étude de quelques exemples m'a conduit à penser que les objets de $\mathcal{C}_\infty$ devaient avoir des représentants canoniques (que j'appelais *maximaux*) dans $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$, et que cette propriété devait être suffisante pour impliquer le résultat désiré. Toutefois, je butais systématiquement sur des problèmes techniques, et n'arrivais finalement à rien démontrer de véritablement intéressant, si ce n'est à conclure sur le cas des objets de rang 1 sur S_1. La lumière m'est apparue lorsque je me suis mis à étudier sérieusement la théorie que Kisin avait développée dans [26] : j'ai alors compris que ce que je cherchais à prouver se transposait directement dans le langage de Kisin, et que dans cette nouvelle situation, tous mes problèmes techniques s'évanouïssaient. Il ne me restait donc plus finalement qu'à faire le lien entre la théorie de Kisin et celle de Breuil. Les travaux de Liu (voir [24, 25]) m'ont été pour cela d'une aide précieuse, et j'ai finalement rédigé deux articles [3, 18] — dont un en collaboration avec Liu — à ce sujet.

L'exposé de la théorie. Détaillons maintenant les résultats obtenus. Pour l'instant, hélas, ils ne concernent que la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$ formée des objets tués par p, que je noterai $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ dans la suite. La restriction de T_{st} à $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ prend alors ses valeurs dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$. Soit $\mathcal{C}_1$ la catégorie déduite de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ en inversant formellement les morphismes f pour lesquels $T_{\mathrm{st}}(f)$ est un isomorphisme. On a alors un foncteur essentiellement surjectif $F : \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1} \to \mathcal{C}_1$.

Proposition 2. *Le foncteur F admet une unique section $G : \mathcal{C}_1 \to \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$, il existe un unique morphisme $f : \mathcal{M} \to G \circ F(\mathcal{M})$ tel que $T_{\mathrm{st}}(f)$ est un isomorphisme.*

Évidemment, l'objet $G(T)$ est le représentant canonique (maximal[1]) que j'ai évoqué plus tôt. Notons $\mathrm{Max} : \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1} \to \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ le foncteur composé $G \circ F$ et $\mathrm{Max}^{\phi,N}_{/S_1}$ son image essentielle. Les foncteurs F et G induisent des équivalences de catégories entre $\mathrm{Max}^{\phi,N}_{/S_1}$ et $\mathcal{C}_1$, et on a le théorème suivant qui est la généralisation attendue du théorème 1.

[1]La propriété de la proposition fait plutôt penser à un objet final qu'un objet maximal (où est l'ordre ?) ; toutefois, il est possible de réinterpréter cela dans un contexte d'ensembles ordonnés dans lequel le qualificatif « maximal » prend tout son sens.

Théorème 3 (voir [18])**.** *La catégorie* $\mathrm{Max}^{\phi,N}_{/S_1}$ *est abélienne et la restriction du foncteur* T_{st} *à cette sous-catégorie est exact et pleinement fidèle*[2]*. En outre, son image essentielle est stable par quotients et sous-objets.*

Supposons de plus k algébriquement clos. Soit $\mathcal{M}$ *un objet simple de* $\mathrm{Max}^{\phi,N}_{/S_1}$*. Alors,* $\mathcal{M}$ *est un* S_1*-module libre et il admet une base* $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ *dans laquelle les structures supplémentaires s'écrivent comme suit :*

- *(la filtration)* $\mathrm{Fil}^r\mathcal{M} = \sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} u^{n_i}e_i$ *où les* n_i *sont des entiers compris entre* $\max(0, er-(p-1))$ *et* er *et ne sont pas tous égaux à* $er-(p-1)$ *;*
- *(le Frobenius)* $\phi_r(u^{n_i}e_i) = e_{i+1}$ *pour tout* $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ *;*
- *(la monodromie)* $N(e_i) = 0$ *pour tout* $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$*.*

En fait, j'étudie dans [18] non seulement la catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ mais aussi certaines variantes, par exemple obtenues en ajoutant des coefficients et/ou des données de descente. Dans tous les cas, je me suis aperçu que le théorème 3 s'étend presque *verbatim*, et qu'en outre les démonstrations sont très semblables. Il m'a donc semblé naturel, afin d'une part d'être en mesure de « factoriser » les preuves et d'autre part de donner plus de clarté à mon exposition, d'introduire une couche d'abstraction supplémentaire en définissant une nouvelle notion décrivant exactement la situation étudiée, à laquelle j'ai choisi de donner le nom de *pylonet*. Pour un exposé plus détaillé de ces pylonets, je me contente de renvoyer à *loc. cit.*

Un autre point important qui est discuté dans *loc. cit.*, et dont je n'ai pas encore parlé, est la construction explicite d'un inverse à gauche du foncteur pleinement fidèle $T_{\mathrm{st}} : \mathrm{Max}^{\phi,N}_{/S_1} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$, c'est-à-dire d'un foncteur $M_{\mathrm{st}} : \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K) \to T_{\mathrm{st}}$ tel que $M_{\mathrm{st}} \circ T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ pour tout objet $\mathcal{M} \in \mathrm{Max}^{\phi,N}_{/S_1}$, ou, ce qui revient au même, $M_{\mathrm{st}} \circ T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M}) = \mathrm{Max}(\mathcal{M})$ pour tout objet $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$. Outre le fait que cela complète de façon satisfaisante la théorie, le foncteur M_{st} présente l'intérêt d'être capable de détecter quelles représentations galoisiennes apparaissent dans l'image de T_{st}, comme en témoigne le théorème suivant.

Théorème 4. *Soit* $T \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$*. Alors* T *est dans l'image essentielle de* T_{st} *si, et seulement si* $M_{\mathrm{st}}(T)$ *est un* S_1*-module libre dont le rang est égal à la dimension de* T *sur* $\mathbb{F}_p$*.*

Dans le cas général, les démonstrations relatives aux propriétés du foncteur M_{st} s'appuient de façon essentielle sur la généralisation d'un théorème d'Ax permettant d'estimer les points fixes de $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ sous l'action du groupe G_K, généralisation que j'ai proposée à Jérémy Le Borgne comme sujet d'un stage de M2, et qui a conduit à une prépublication indépendante [23].

Une illustration inattendue. Pendant la gestation de la théorie que je viens d'exposer, je participais en parallèle à un groupe de travail sur les généralisations de la conjecture de modularité de Serre organisé par Breuil, Henniart, Mézart et Ollivier. Le sujet n'était pas exactement la même, mais une partie d'une démonstration de Gee que l'on souhaitait comprendre faisait appel à des calculs précis sur des objets (du même type que ceux) de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$ que j'étais supposé exposer. J'étudiais donc le papier en question [21] et me suis rendu assez vite compte que les calculs que je devais comprendre étaient malheureusement faux ! J'ai donc essayé de colmater le trou, et, ce faisant, je me suis aperçu que la théorie que j'étais en train de mettre au point par ailleurs me dictait clairement la marche à suivre pour cela ! Grâce à cette remarque, j'ai finalement pû terminer sereinement la préparation de mon exposé, en proposant une correction à l'argument initial de Gee[3]... mais mieux encore de mon point de vue, je venais, par un hasard inattendu, de trouver une illustration très nette de ma théorie.

L'étude de l'action de l'inertie modérée. Sur un thème très proche, une autre problématique à laquelle je me suis intéressé à été de comprendre l'image essentielle du foncteur T_{st}

[2] En fait, T_{st} est déjà exact et fidèle sur $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$, et même sur $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_\infty}$.

[3] Les notes de cet exposé ont fait l'objet de la prépublication référencée [12] dans la bibliographie.

qui apparaît précédemment. « Comprendre l'image essentielle de T_{st} » est certainement un trop vaste programme, mais plus modestement, on peut chercher à dégager un certain nombre de propriétés partagées par toutes les représentations galoisiennes qui apparaissent dans cette image, ce qui permet donc de faire un premier tri. Dans la continuité des résultats que j'avais obtenus dans ma thèse, la première propriété sur laquelle je me suis concentré concernait les poids de l'inertie modérée. Pour expliquer un peu plus précisément ce dont il est question, je dois commencer par rappeler qu'à toute représentation T de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_K)$ de dimension d, Serre associe un multi-ensemble de d élements de $\{0,\ldots,p-1\}$ (dont les éléments sont appelés les *poids de l'inertie modérée*) qui rend compte de l'action du groupe d'inertie modérée sur T. La question est : que peut-on dire des poids de l'inertié modérée lorsque T s'écrit $T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ avec $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$? J'avais démontré dans ma thèse une première estimation qui précise que ceux-ci sont toujours $\leqslant er$. Avec Savitt, nous avons raffiné ce résultat de la façon suivante.

Théorème 5 (voir [2], lemme 3.4)**.** *On suppose $er < p-1$. Soit $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ libre de rang d sur S_1. Soient $m_1 \leqslant \cdots \leqslant m_d$ les exposants des diviseurs élémentaires relatifs à l'inclusion $\mathrm{Fil}^r S \cdot \mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$, et soient $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_d$ les poids de l'inertie modérée de $T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$. Alors*

$$m_1 + \cdots + m_k \leqslant i_1 + \cdots + i_k$$

pour tout $k \in \{1,\ldots,d\}$ et l'égalité a lieu si $k = d$.

Remarque. La définition de $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ implique $0 \leqslant m_i \leqslant er$ pour tout entier i. Ainsi le théorème précédent entraîne directement que les i_k sont eux aussi compris entre 0 et er, et donc apparaît bien comme un raffinement du résultat que j'avais obtenu dans ma thèse.

En fait, le théorème 5 n'a d'intérêt que s'il peut s'appliquer à une situation (plus) concrète, c'est-à-dire si l'on connaît des T dans l'image de T_{st} pour lesquels on sait en outre calculer (ou du moins estimer) les diviseurs élémentaires associés au $\mathcal{M}$ correspondant (*i.e.* à $M_{\mathrm{st}}(T)$). Heureusement, cela se produit et c'est le deuxième résultat que nous avons obtenu avec Savitt.

Théorème 6 (voir [2], lemme 3.5)**.** *On suppose $er < p-1$. Soient V une représentation semi-stable de G_K de dimension d et T le quotient de deux réseaux de V stables par G_K. On suppose que T est annulé par p. Alors $T = T_{\mathrm{st}}(\mathcal{M})$ pour un certain $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ (déterminé à isomorphisme près[4]). De plus, si $m_1 \leqslant \cdots \leqslant m_d$ désignent les exposants des diviseurs élémentaires relatifs à l'inclusion $\mathrm{Fil}^r S \cdot \mathcal{M} \subset \mathrm{Fil}^r\mathcal{M}$ et si $h_1 \leqslant \cdots \leqslant h_d$ sont les poids de Hodge-Tate de V, on a*

$$e(h_1 + \cdots + h_k) \leqslant m_1 + \cdots + m_k$$

pour tout $k \in \{1,\ldots,d\}$ et l'égalité a lieu si $k = d$.

En combinant les deux thèorèmes précédents, on obtient l'énoncé suivant dans lequel toute trace de la catégorie $\mathrm{Mod}^{\phi,N}_{/S_1}$ a disparu.

Corollaire 7 (voir [2], théorème 1.1)**.** *On suppose $er < p-1$. Soient V une représentation semi-stable de G_K de dimension d et T le quotient de deux réseaux de V stables par G_K. On suppose que T est annulé par p. Notons $h_1 \leqslant \cdots \leqslant h_d$ les poids de Hodge-Tate de V et $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_d$ les poids de l'inertie modérée de T. Alors*

$$e(h_1 + \cdots + h_k) \leqslant i_1 + \cdots + i_k$$

pour tout $k \in \{1,\ldots,d\}$ et l'égalité a lieu si $k = d$.

Comparer les poids de Hodge-Tate et ceux de l'inertie modérée dans le sens du corollaire précédent est en réalité une question qui avait déjà été regardée par certains auteurs. Par exemple, en reprenant les notations du corollaire, Fontaine et Laffaille avaient montré que la famille des (h_k) coïncide avec celles de (i_k) dès lors que V est cristalline et $e = 1$ (autrement dit, dans ce cas, l'égalité dans le corollaire a lieu pour tout k). Breuil et Mézard ont montré

[4] C'est une conséquence de la pleine fidélité de T_{st}.

ensuite que le résultat de Fontaine-Laffaille ne s'étend malheureusement pas aux représentations semi-stables, même dans le cas le plus simple avec $e = 1$ et $d = 2$. La question restait malgré tout ouverte de savoir si l'égalité entre les h_k et les i_k était impliquée par le caractère cristallin de V. Savitt et moi-même avons finalement répondu par la négative, en démontrant le théorème suivant.

Théorème 8 (voir [4], théorème 1.1)**.** *Supposons $e > 1$. Alors, pour tout $v \in \{0, \dots, e\}$, il existe une représentation cristalline V à poids de Hodge-Tate 0 et 2 et un réseau $L \subset V$ stable par G_K tels que les poids de l'inertie modérée de L/pL soient $1 - \frac{v}{e}$ et $1 + \frac{v}{e}$.*

Une borne pour la ramification sauvage. Après avoir étudié l'action de l'inertie modérée sur les représentations de la forme $T_{\rm st}(\mathcal{M})$, il est naturel de s'intéresser à l'action de l'inertie sauvage, et c'est sur cette voie que je me suis engagé un avec Liu. Classiquement dans ce contexte, pour maîtriser l'action de l'inertie sauvage, on introduit la filtration de ramification de G_K en notation supérieure (G_K^μ) telle que définie dans [20], et on se demande s'il existe un nombre réel μ explicite (et si possible qui ne dépende que de paramètres simples) tel que G_K^μ agisse trivialement. Le premier résultat dans ce sens est dû à Fontaine (pour les cas $n = 1$ et $r = 1$) et Abrashkin (pour le cas général) et s'énonce comme suit.

Théorème 9 (Fontaine-Abrashkin)**.** *On conserve toutes les notations précédentes (en particulier r désigne un entier compris entre 0 et $p - 2$) et on suppose $e = 1$. Soient V une représentation cristalline de G_K à poids de Hodge dans $\{0, \dots, r\}$ et $L \subset V$ un réseau stable par G_K. Alors si $\mu > n + \frac{r}{p-1}$, le sous-groupe G_K^μ agit trivialement sur L/p^nL.*

Dans le cas $r = 1$, Fontaine avait également obtenu une généralisation de ce théorème à tout e, la borne étant alors $e(n + \frac{1}{p-1})$. Tout ceci l'a amené à conjecturer que le théorème devrait s'étendre à tout e et tout r (toujours pour les représentations cristallines) avec la borne

$$\mu_{\rm F}(e, n, r) = e\Big(n + \frac{r}{p-1}\Big) \tag{1}$$

(l'indice F dans $\mu_{\rm F}$ fait référence à Fontaine). Le théorème de Fontaine et Abrashkin a été par la suite étendu par plusieurs auteurs à des situations un peu plus générales (notamment $e > 1$, ainsi que des cas où la représentation V est semi-stable), mais faisant néanmoins toujours intervenir l'hypothèse restrictive $r < p - 1$. *A contrario*, le résultat que nous avons obtenu avec Liu ne fait pas d'hypothèse sur les poids de Hodge-Tate ; il s'énonce comme suit :

Théorème 10 (voir [16], théorème 1.3)**.** *Soit r un entier positif ou nul. Soient V une représentation semi-stable de G_K dont les poids de Hodge-Tate sont dans $\{0, \dots, r\}$, et $L \subset V$ un réseau stable par G_K. Écrivons $\frac{nr}{p-1} = p^\alpha \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\frac{1}{p} < \beta \leqslant 1$. Alors pour tout entier n, et tout*

$$\mu > \mu_{CL}(e, n, r) := 1 + e \cdot \Big[n + \alpha + \max\Big(\beta, \frac{1}{p-1}\Big)\Big] \tag{2}$$

le sous-groupe G_K^μ agit trivialement sur L/p^nL.

Remarque. Tel qu'énoncé ici, le théorème semble faire une hypothèse sur les poids de Hodge-Tate, à savoir que ceux-ci sont toujours positifs ou nuls. Toutefois, ce n'est pas une hypothèse sérieuse, et on peut toujours se ramener à ce cas par un twist.

Il est instructif de comparer notre résultat avec la borne conjecturale de Fontaine, *i.e.* de comparer les formules (1) et (2). Il n'est malheureusement pas vrai que $\mu_{\rm CL}(e, n, r) \leqslant \mu_{\rm F}(e, n, r)$ pour tous e, n et r ; ainsi la borne de Fontaine ne résulte pas du théorème 10. Par contre, si l'on analyse l'asymptotique (lorsque n et r grandissent), on trouve respectivement les estimations

$$\mu_{\rm F}(e, n, r) = en + \frac{er}{p-1} \quad \text{et} \quad \mu_{\rm CL}(e, n, r) = en + e \log_p(nr) + O(1)$$

à partir desquelles on voit directement que la borne du théorème 10 est bien meilleure que celle conjecturée par Fontaine lorsque n est fixé et r tend vers l'infini (dépendance logarithmique

VS linéaire) ! Par contre, la dépendance en n est meilleure dans l'expression de μ_{F}, ce qui laisse présager que le théorème 10 n'est pas optimal.

Pour conclure ce paragraphe, voici quelques indications sur la preuve du théorème 10. Pour simplifier l'exposition, nous allons supposer $n = 1$. Il est à noter que, puisque les hypothèses autorisent r à varier dans un intervalle dont la longueur dépasse certainement $p-2$, il n'est pas possible d'appliquer la théorie de Breuil pour laquelle l'hypothèse $r < p-1$ est primordiale. Nous nous sommes donc plutôt appuyés sur la théorie des $\mathfrak{S}$-modules (initiée par Breuil, développée par Kisin dans le cas entier, puis par Liu dans le cas de torsion), certes plus générale dans le sens où elle autorise des poids de Hodge-Tate arbitraires, mais en contrepartie moins précise (en tout cas, dans son état actuel). Précisons-en très briévement la teneur dans le cas qui nous intéresse. Pour cela, on commence par rappeler que l'on avait fixé π une uniformisante de K. On choisit ensuite (π_n) un système compatible de racines p^n-ièmes de π, et pour tout n, on note $K_n = K(\pi_n) \subset \bar{K}$. Soit $K_\infty = \bigcup_{n\geqslant 0} K_n$, et pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, soit G_n le groupe de Galois absolu de K_n ; c'est un sous-groupe de G_K. On introduit aussi l'anneau $\mathfrak{S}_1 = k[[u]]$ que l'on munit du Frobenius ϕ défini comme l'élévation à la puissance p. Soit $\mathrm{Mod}^\phi_{/\mathfrak{S}_1}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathfrak{S}_1$-modules libres de rang fini $\mathfrak{M}$ munis d'un endomorphisme ϕ-semi-linéaire $\phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ tel que $\langle\, \mathrm{im}\phi\, \rangle$[5] contienne $u^{er}\mathfrak{M}$. On dispose alors d'un foncteur $T_{\mathfrak{S}} : \mathrm{Mod}^\phi_{/\mathfrak{S}_1} \to \mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(G_\infty)$ dont l'image essentielle contient les restrictions à K_∞ des représentations L/pL qui apparaissent dans le théorème 10. On obtient comme ceci une description de l'action de G_∞ sur L/pL, mais ce n'est pas suffisant pour ce que l'on souhaite démontrer puisqu'il n'existe hélas aucun réel μ tel que G_K^μ soit inclus dans G_∞ ! L'essentiel de notre travail a donc consisté à affiner la théorie précédente en montrant que l'on peut remplacer partout « G_∞ » par « G_s » avec s un entier explicite ne dépendant que de e et r (et aussi n dans le cas général, mais on a supposé ici $n = 1$ pour simplifier). Une fois cette étape franchie, il a été possible d'adapter les arguments initiaux de la preuve du théorème 9 (dûs à Fontaine) pour trouver un réel μ tel que G_s^μ agisse trivialement, puis de conclure par une formule de transitivité. Citons finalement un corollaire intéressant de notre étude.

Théorème 11. *Soient V et V' deux représentations semi-stables de G_K. Soit T (resp. T') le quotient de deux réseaux de V (resp. V'). Soit n le plus petit entier tel que p^n annule T ou T'. Alors tout morphisme G_∞-équivariant $f : T \to T'$ est G_s-équivariant pour $s > n-1+\log_p(nr)$.*

Des $\mathfrak{S}_1$-modules aux variétés de Deligne-Lusztig. Après la sortie de ma première prépublication avec Liu concernant notre travail sur les représentations semi-stables de torsion (évoqué précédemment dans ce rapport), j'ai été invité à donner un exposé à Cetraro (Italie) pour une conférence intitulée « *Arithmetic Algebraic Geometry Conference* »[6]. Hormis la possibilité d'exposer mes résultats, cette conférence fut l'occasion de rencontrer Michael Rapoport. Il s'intéresserait aussi aux $\mathfrak{S}_1$-modules qui apparaissent dans la théorie de Kisin, mais avec un point de vue et des questions qui étaient nouveaux pour moi. Précisément, étant donné $\mathfrak{M}$ un objet de $\mathrm{Mod}^\phi_{/\mathfrak{S}_1}$ (avec $r = 1$)[7] il voulait étudier l'ensemble

$$V_M(k) = \big\{\mathfrak{M}' \in \mathrm{Mod}^\phi_{/\mathfrak{S}_1} \;\big|\; \mathfrak{M}' \text{ est un réseau dans } M = \mathfrak{M}[1/u]\big\}.$$

En fait, l'ensemble $V_M(k)$ apparaît naturellement comme les k-points d'une variété algébrique V_M définie sur k, et la famille des diviseurs élémentaires de l'inclusion $\phi(\mathfrak{M}') \subset \mathfrak{M}'$ définit une stratification naturelle de V_M. La question qui motivait Rapoport était de comprendre la structure de cette variété et de la stratification associée : dimension (de la variété et des strates), connexité (de la variété et des strates), lissité (de la variété et des strates), *etc.* En réalité, ces variétés ont déjà fait l'objet d'une étude approndie dans une situation

[5] La notation $\langle \cdots \rangle$ signifie le $\mathfrak{S}_1$-module engendré.

[6] `http://www.math.unipd.it/aag/`

[7] En fait, cette restriction est un peu superflue, mais c'est réellement le cas $r = 1$ qui intéressait Rapoport car le problème se reformule alors en termes de schémas en groupes.

légèrement différente, celle où le Frobenius sur $\mathfrak{S}_1$ n'agit pas par l'élévation à la puissance p sur la variable u mais par l'identité : on obtient alors ce que l'on appelle des *variétés de Deligne-Lusztig affines*, et on en a des descriptions assez satisfaisantes. Quoi qu'il en soit, le cas du Frobenius $u \mapsto u^p$ était largement inexploré, et semblait conduire à des phénomènes semblables par certains côtés, mais néanmoins beaucoup plus subtils (notamment, faisant apparaître des conditions de congruence inexistantes dans le cas classique).

C'était, de toute façon, pour moi un sujet entièrement nouveau, et je me suis rapidement engouffré dans cet axe de recherche. Dans une première prépublication [13], j'ai presque complètement décrit la situation en dimension 2, et est notamment souligné que pour des diviseurs élémentaires (n, m) la dimension de la strate correspondante était de l'ordre de $\frac{|m-n|}{p+1}$ lorsqu'elle est non vide... ce qui correspond à la formule classique avec $p = 1$! Avec des méthodes différentes, l'étude a été ensuite reprise (et légèrement peaufinée et complétée) par Hellmann dans [22]. Plus récemment, à l'occasion d'un séjour à Bonn consécutif à une invitation de Rapoport, je me suis attaqué aux dimensions supérieures. Cette fois-ci, la situation semble encore plus complexe ; j'ai obtenu des formules conjecturales supposées estimer la dimension des strates, mais celles-ci restent encore pour moi très mystérieuses (ce n'est en tout cas certainement pas aussi simple que le $\frac{|m-n|}{p+1}$ qui apparaît en dimension 2). J'ai malgré tout écrit à ce sujet une nouvelle prépublication [14], que je compte encore améliorer (et peut-être fusionner avec [13]) avant de proposer un texte définitif pour publication. En tout cas, une chose est sûre : il reste encore beaucoup de belles choses à découvrir dans cette direction !

Une ouverture vers l'algorithmique. À plusieurs reprises au cours de ma recherche, j'ai souffert de ne pas disposer d'une quantité suffisante d'exemples pour tester certaines conjectures, ou encore l'optimalité de certains résultats que j'avais obtenus. Armés d'un papier, d'un stylo et d'un peu de courage, je me suis donc lancé dans le projet de calculer explicitement de larges familles d'exemples illustrant les aspects les plus divers de la théorie de Breuil. Après un premier calcul extrèmement laborieux — fait en collaboration avec Savitt dans [4] — qui se contentait d'explorer un morceau microscopique du paysage, j'ai rapidement compris que la tâche que je m'étais fixée ne pouvait être menée à terme sans l'aide de l'outil informatique.

C'est donc tout naturellement que je me suis tourné vers l'algorithmique de la théorie de Breuil. Par une chance extraordinaire, c'est à ce même moment que trois cryptographes (donc des chercheurs très familiers avec les questions algorithmiques) du CELAR ont été intégrés à notre laboratoire. J'ai donc tout de suite fait part de mon projet à ces nouveaux arrivants, et ai été très content de remarquer que l'un d'entre eux, David Lubicz, l'a accueilli de façon très favorable. Ensemble, nous avons proposé un sujet de thèse sur la question qui a rapidement trouvé preneur. Par ailleurs, avec également d'autres collègues, nous avons mis au point un projet ANR que nous avons soumis au dernier appel. Ceci est encore très récent, et il est trop tôt pour parler de résultats, mais je suis certain que notre collaboration sera fructueuse.

Liste des exposés que j'ai donnés.

- Séminaire interne (février 2007, Rennes) : « Polygones de Hodge et de l'inertie modérée »
- Groupe de travail *Généralisations de la conjecture de modularité de Serre* (avril 2007, Paris) : « Schémas en groupes et poids de Diamond-Serre »
- Conférence *p-adic aspects of arithmetic geometry* (juin 2007, Tambara, Japon) : « Tame inertia polygon of a semi-stable representation »
- Conférence *p-adic method in arithmetic geometry and its applications* (juin 2007, Tokyo, Japon) : « Torsion (quasi-)semi-stable representations »
- Conférence *Arithmetic Algebraic Geometry Conference* (octobre 2007, Cetraro, Italie) : « Torsion semi-stable representations *via* Breuil modules »
- Séminaire interne (octobre 2007, Rennes) : « Une idée pour classifier certains ϕ-modules simples »
- Séminaire de géométrie arithmétique (novembre 2007, Bonn, Allemangne) : « Hodge-Tate weights and inertia weights of semi-stable representations »

- Séminaire interne (janvier 2008, Rennes) : « Pourquoi la version d'Ax du théorème d'Ax-Sen-Tate n'est-elle pas suffisante pour la théorie de Hodge p-adique de torsion ? »
- Groupe de travail *Espaces de modules de schémas en groupes et représentations galoisiennes (d'après Kisin)* (mars 2008, Paris) : « $\mathfrak{S}$-modules »(deux exposés)
- Séminaire (juin 2008, Padoue, Italie) : « Comparaison entre les poids de Hodge-Tate d'une représentation semi-stable et les poids de l'inertie modérée de sa semi-simplifiée mod p »
- Séminaire de géométrie arithmétique (juin 2008, Bonn, Allemangne) : « Some bounds on ramification of torsion semi-stable representations »
- Séminaire interne (octobre 2008, Rennes) : « Recouvrement d'un quadrillage par des droites »
- Séminaire *Géométrie arithmétique et motivique* (novembre 2008, Paris) : « Quelques bornes sur la ramification des représentations semi-stables »

Liste des publications. Voir la bibliographie p.11.

A.3. Enseignement, formation et diffusion de la culture scientifique

Cours au niveau de l'agrégation. Dans le cadre de la préparation à l'agrégation proposée par l'UFR de mathématiques de l'université de Rennes 1, j'ai encadré cinq leçons[8] dans ces deux dernières années. Concernant la leçon « Constructions à la règle et au compas », j'ai écrit deux notes originales [6, 7] dont le but initial était de servir de support pour d'éventuels développements. Ces deux textes ont maintenant été publiés dans la RMS.

Encadrement de stages. Durant ces deux dernières années, j'ai encadré plusieurs stages à différents niveaux. Dans l'ordre chronologique :
- Un stage de fin de L3 avec David Pigeon (un élève magistérien de l'École normale supérieure de Lyon) sur le thème de la répartition des nombres premiers ; ce stage a donné lieu à une publication [5] dans la RMS.
- Un stage de TER (niveau M1) avec Anne Gobillot et Noémie Crétois-Payre sur le théorème de Poncelet.
- Un deuxième stage de TER (niveau M1) avec Thomas Homshaw sur l'irrationalité de $\zeta(3)$, et plus généralement sur celle des $\zeta(2n+1)$.
- Un stage de M2 avec Jérémy Le Borgne sur le théorème d'Ax-Sen-Tate ; nous avons étudié la démonstration d'Ax, puis celle de Tate.

Le site « Images des Mathématiques ». Depuis peu, je suis billetiste pour le nouveau site « Images des Mathématiques »[9].

Accueil de collégiens. À deux reprises, j'ai participé à l'accueil d'un jeune collégien qui avait choisi notre laboratoire de mathématiques pour son stage en entreprise obligatoire pendant l'année de troisième.

Olympiades de mathématiques. Je participe régulièrement (une à deux semaines, une à deux fois par an), comme encadrant et professeur, à des stages de préparation aux olympiades internationales de mathématiques organisés soit par Animath, soit par l'OFM (Olympiade française de mathématiques).

En outre, j'ai accompagné la délégation française aux Olympiades internationales de mathématiques au Vietnam deux semaines en août 2007. Avec Pierre Bornsztein qui a été accompagnateur l'année suivante en Espagne, nous avons écrit un compte-rendu de nos deux expériences qui a été publié récemment dans Quadratique (voir [8]).

[8] 1h30 de séance pléniaire, plus plusieurs rendez-vous préparatifs avec les étudiants

[9] `http://images.math.cnrs.fr/`

Fête de la science. J'ai participé pendant une demi-journée à l'animation du stand de notre laboratoire de mathématiques à la fête de la science à Rennes.

Autres articles. En plus de ce qui précède, j'ai écrit deux autres articles [9, 10] pour des revues de diffusion de la connaissance mathématique.

A.4. Transfert technologique, relations industrielles et valorisation

A.5. Encadrement, animation et management de la recherche

Séminaire interne. Depuis mon affectation à l'université de Rennes 1, j'organise un séminaire interne qui sé réunit une fois par semaine (le mercredi). L'objectif est que chaque membre de notre équipe expose à tour de rôle devant ses collègues les thèmes principaux de sa recherche. Le séminaire qui touchait à l'origine seulement l'équipe de géométrie algébrique s'est ouvert depuis l'année dernière à l'ensemble des trois équipes de géométrie.

Direction de thèse. Depuis le mois de septembre 2009, j'encadre avec David Lubicz la thèse de Jérémy Le Borgne intitulée « Méthodes algorithmiques pour la théorie de Hogde p-adique ».

Bibliographie

Mes publications et prépublications depuis 2 ans.

Revues à comité de lecture — articles de recherche

[1] X. Caruso, *Conjecture de l'inertie modérée de Serre*, Invent. math. **171** (2008), 629–699

[2] X. Caruso, D. Savitt, *Polygônes de Hodge, de Newton et de l'inertie modérée des représentations semi-stables*, Math. Ann. **343** (2009), 773–791

[3] X. Caruso, T. Liu, *Quasi-semi-stable representations*, à paraitre dans Bull. Soc. Math. France, 39 pages.

[4] X. Caruso, D. Savitt, *Poids de l'inertie modérée de certaines représentations cristallines*, à paraître dans J. Théor. Nombres Bordeaux, 18 pages.

Revues à comité de lecture — autres articles

[5] X. Caruso, D. Pigeon, *Autour du théorème des nombres premiers*, RMS **118-3** (2008), 3–15

[6] X. Caruso, *Trisection de l'angle et duplication du cube*, RMS **118-4** (2008), 24–28

[7] X. Caruso, *Constructions à la règle courte et au compas à ouverture limitée*, RMS **119-2** (2009), 7–13

[8] X. Caruso, P. Bornsztein, *Au cœur des Olympiades Internationales de Mathématiques*, Quadrature **71** (2009), 31–44

[9] X. Caruso, *Autour de l'hypothèse du continu : construction de* $\aleph_1$, à paraître dans Quadrature, 4 pages

[10] X. Caruso, *Une incarnation peu connue du corps des nombres réels*, à paraître dans la RMS, 3 pages

Groupes de travail

[11] X. Caruso, $\mathfrak{S}$-*modules*, 13 pages

Autres : prépublications

[12] X. Caruso, *Schémas en groupes et poids de Diamond-Serre*, preprint (2007), 9 pages

[13] X. Caruso, *Diviseurs élémentaires des modules de Kisin. Exemples en dimension* 2, preprint (2007), 12 pages

[14] X. Caruso, *Dimensions de certaines variétés de Deligne-Lusztig affines généralisées*, preprint (2008), 12 pages

[15] X. Caruso, *Sur la classification de quelques ϕ-modules simples*, preprint (2008), 5 pages

[16] X. Caruso, T. Liu, *Some bounds for ramification of p^n-torsion semi-stable representations*, preprint (2008), 29 pages

[17] X. Caruso, *Classification of integral models of $(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})_K$ via Breuil-Kisin theory*, preprint (2008), 3 pages

[18] X. Caruso, *$\mathbb{F}_p$-représentations semi-stables*, preprint (2008), 37 pages

Autres références utilisées dans le document.

[19] X. Caruso, *Représentations semi-stables de torsion dans le cas $er < p-1$*, J. reine angew. Math. **594** (2006), 35–92

[20] J.-M. Fontaine, *Schémas propres et lisses sur $\mathbb{Z}$*, in *Proceedings of the Indo-French Conference on Geometry (Bombay, 1989)*, 43–56, 1993

[21] T. Gee, *On the weights of mod p Hilbert modular forms*, preprint (2008), 27 pages

[22] E. Hellmann, *On the structure of some moduli spaces of finite flat group schemes* preprint (2008), 27 pages

[23] J. Le Borgne, *Optimisation du théorème d'Ax-Sen-Tate et application à un calcul de cohomologie galoisienne p-adique*, preprint (2009), 12 pages

[24] T. Liu, *Torsion p-adic Galois representation and a conjecture of Fontaine*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **40** (2007), 633–674

[25] T. Liu, *Lattices in semi-stable representations : proof of a conjecture of Breuil*, Compositio Math. **144** (2008), 61–88

[26] M. Kisin, *Crystalline representations and F-crystals*, Algebraic Geometry and Number Theory, Drinfeld 50th Birthday volume, 459–496