Un, deux, trois... et ensuite ?

Ensembles dénombrables

On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels. Cela signifie qu'il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to E$ [1] telle que tout élément de E a un et un seul antécédent par f. Autrement dit, E est dénombrable si on est capable de numéroter tous ses éléments, c'est-à-dire de dire qu'un tel est le zéroième, un tel le premier, un tel le deuxième, etc. et ce sans en oublier aucun. Donnons tout de suite des exemples.

Le plus simple est sans doute $\mathbb{N}$ qui est dénombrable. En effet, il est facile de numéroter les entiers. On dit tout simplement que 0 est le zéroième, 1 le premier, plus généralement n le n-ième. La fonction qui correspond à cela est simplement l'identité, c'est-à-dire la fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à un entier associe lui-même. Bien entendu, elle est bijective.

Considérons désormais une partie infinie A de $\mathbb{N}$. Là encore, on peut numéroter les éléments de A. On dit par exemple que le plus petit est le zéroième, que le deuxième plus petit est le premier, ainsi de suite.

Question 1. *Construire rigoureusement par récurrence cette fonction $\mathbb{N} \to A$ et prouver qu'elle est bijective.*

On en déduit qu'un ensemble E est dénombrable si et seulement s'il est infini et l'on peut trouver une fonction $f : \mathbb{N} \to E$ *surjective* (ie tout élément de E a au moins un antécédent, mais pas forcément un unique). En effet, si l'on a construit une telle fonction, on peut considérer le sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ formé des entiers x tels que pour tout $x' < x$, $f(x') \neq f(x)$. La fonction f restreinte à A, que l'on notera $f_{|A}$, est alors bijective (*Pourquoi ?*). D'autre part A est infini donc d'après ce que l'on vient de faire il existe une bijection $g : \mathbb{N} \to A$. La fonction $f_{|A} \circ g$ réalise alors une bijection de $\mathbb{N}$ dans E (*Pourquoi ?*).

Question 2. *Montrer en utilisant ce qui précéde qu'une partie d'un ensemble dénombrable est soit finie, soit dénombrable (on dit souvent* au plus dénombrable*).*

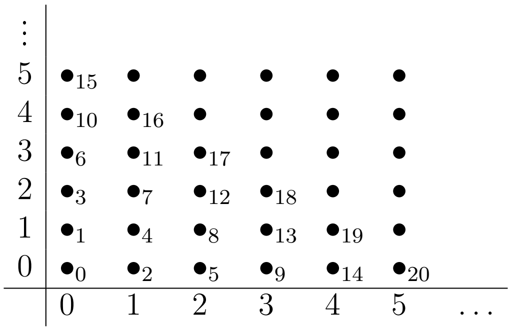
L'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres relatifs est dénombrable. Une façon d'énumérer les éléments de $\mathbb{Z}$ est par exemple 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, etc. La fonction considérée ici est la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ qui à un nombre pair $2n$ associe $-n$ et qui à un nombre impair $2n+1$ associe $n+1$. Je prétends qu'elle est bijective.

Question 3. *Le vérifier.*

[1] On remarquera qu'une fonction de $\mathbb{N}$ dans E n'est autre qu'une suite à valeurs de $\mathbb{N}$. En effet, noter $f(n)$ ou f_n (ou u_n) revient moralement au même.

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Une façon de numéroter ses éléments est décrite par le dessin de la page suivante.

(Je te conseille de t'amuser à chercher avant de regarder la solution. C'est assez instructif je trouve).



On déduit de cette propriété des conséquences qui vont nous permettre de montrer plus rapidement que certains ensembles sont dénombrables.

La première est que si A et B sont deux ensembles dénombrables, il en est de même de leur produit cartésien $A \times B$. Pour voir cela, considérons $f_A : \mathbb{N} \to A$, $f_B : \mathbb{N} \to B$ deux bijections. Elles existent puisque A et B sont dénombrables. On regarde alors la fonction f définie par :

$$f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & A \times B \\ (n,m) & \mapsto & (f_A(n), f_B(m)) \end{array} \right)$$

Il s'agit d'une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $A \times B$. Si maintenant l'on prend $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ une bijection, la composée $f \circ g$ sera une bijection de $\mathbb{N}$ dans $A \times B$ et donc $A \times B$ sera dénombrable.

Question 4. *Rédiger proprement la démonstration précédente. En déduire par récurrence que si $A_1, \ldots, A_n$ sont des ensembles dénombrables, alors leur produit $A_1 \times \cdots \times A_n$ l'est aussi.*

Une autre conséquence est que si l'on se donne pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, un ensemble dénombrable A_n, alors la réunion des A_n notée $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui appartiennent au moins à un des A_n) est encore dénombrable. Je tiens à remarquer que cette propriété n'est pas la même que celle énoncée précédemment pour les produits. En effet pour les produits, on se cantonnait à des produits finis[2] au sens où le nombre de termes qui apparaissent dans le produit était fini, aussi grand qu'on le souhaitait certes mais fini. Ici, on prend la réunion d'une infinité d'ensembles, ce n'est pas la même chose. Je tiens également à remarquer que le fait que les ensembles A_n soit indicés par les entiers naturels est très importants. De fait, il n'est pas vrai qu'une réunion quelconque d'ensembles dénombrables l'est encore.

Question 5. *Bien comprendre les deux remarques qui précèdent. Ne pas hésiter à poser des questions si nécessaire.*

Esquissons à présent la démonstration de la propriété énoncée. Pour tout entier n, il existe une bijection $\mathbb{N} \to A_n$, notons-la f_n. Définissons l'application f suivante :

$$f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \to & \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \\ (n,m) & \mapsto & f_n(m) \end{array} \right)$$

[2] Il est possible de parler de produits infinis mais déjà les définir n'est pas quelque chose de si simple. Nous n'en parlerons pas ici de toute façon.

Cette application n'est en général pas bijective. Par contre, elle est toujours surjective et sa composée avec une bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ l'est également. Autrement dit, on vient de construire une surjection de $\mathbb{N}$ dans $\cup_{n \in N} A_n$, et on a vu que cela suffisait à entraîner que $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un ensemble dénombrable.

Ces deux propriétés permettent de montrer que bien des ensembles sont dénombrables. Par exemple $\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}$ (n fois), que l'on note souvent $\mathbb{N}^n$ est dénombrable. $\mathbb{Z}^n$ l'est également. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est également dénombrable. En effet, on peut écrire $\mathbb{Q}$ comme la réunion des $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$ pour q parcourant $\mathbb{N}^\star$ où $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$ est l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{p}{q}$ pour p entier relatif. Comme les $\mathbb{Z}$ est dénombrable, les $\frac{1}{q}\mathbb{Z}$ le sont également (*Pourquoi ?*), et finalement par la propriété précédente, leur réunion $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Question 6. *Montrer de même que l'ensemble des suites à valeurs entières qui sont périodiques à partir d'un certain rang est dénombrable.*

Réfléchis un instant à ce que cela signifie. Cela signifie précisément que l'on a un moyen de numéroter les suites à valeurs entières qui sont périodiques à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que l'on peut dire que celle-ci est la zéroième, celle-là la première et ainsi de suite et ce sans en omettre une seule. N'est-ce pas impressionnant ?

Jusqu'à présent, on a cité plein d'ensembles dénombrables mais il existe également des ensembles qui ne le sont pas. Un des premiers exemples est $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. En fait, nous allons montrer quelque chose de plus fort nous allons montrer que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas dénombrable[3]. Pour arriver à nos fins, nous allons faire ce que l'on appelle un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire que nous allons supposer que l'intervalle $[0,1]$ est dénombrable et aboutir à une contradiction. Cela signifiera donc que notre hypothèse de départ était fausse. Supposons donc que $[0,1]$ soit un ensemble dénombrable. L'ensemble $[0,1[$ le serait également. Considérons donc une bijection $f : \mathbb{N} \to [0,1[$. Les nombres de $[0,1[$ s'écrivent sous la forme $0, a_1 a_2 a_3 ...$ où a_i est la i-ième décimale de notre réel, c'est un entier compris entre 0 et 9. De façon analogue, on développe tous les nombres réels suivants :

$$\begin{array}{rclcccccc}
f(1) & = & 0, & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & \cdots \\
f(2) & = & 0, & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & \cdots \\
f(3) & = & 0, & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & \cdots \\
f(4) & = & 0, & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & \cdots \\
f(5) & = & 0, & a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & \cdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

N'oublions pas que l'on veut arriver à une contradiction et que nous avons supposé f bijective. Ce que l'on peut faire c'est donc construire un réel compris entre 0 et 1 qui ne soit l'image d'aucun entier par f. Autrement dit, on peut construire réel x compris entre 0 et 1 qui soit différent de $f(1)$, différent de $f(2)$, etc. Écrivons x sous la forme $0, x_1 x_2 x_3 ...$ et essayons de voir comment l'on peut choisir les x_i pour que x satisfasse ce que l'on veut. Mais pour que x soit différent de $f(1)$, il suffit qu'une décimale de x diffère que la décimale correspondante de $f(1)$. Par exemple si l'on choisit $x_1 \neq a_{1,1}$ on sera sûr que $x \neq f(1)$. Mais l'on peut continuer ainsi : en choisissant $x_2 \neq a_{2,2}$, on aura la garantie que $x \neq f(2)$. Finalement si l'on choisit

[3] C'est plus fort car nous avons vu qu'un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable l'est encore. Ceci prouve qu'un sur-ensemble d'un ensemble non dénombrable ne l'est pas non plus.

pour tout entier n, un entier x_n compris entre 0 et 9 qui est différent de $a_{n,n}$, le réel x obtenu va être différent de tous les $f(n)$, ce qui veut dire qu'il n'aura pas d'antécédent par f... et là voilà notre contradiction.

Question 7. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Construire une bijection entre l'intervalle $[a, b]$ et l'intervalle $[0, 1]$. En déduire que l'intervalle $[a, b]$ n'est pas dénombrable.*

Ensembles totalement ordonnés

Soit E un ensemble. Munir E d'un *ordre total*, c'est être capable de dire étant donnés deux éléments distincts quelconques de E, disons x et y, si $x < y$ ou si $x > y$ et ce de façon exclusive. On impose quand même le fait que si $x < y$ et $y < z$ alors $x < z$. Bien entendu, les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ sont naturellement munis d'ordres totaux. Mais on peut imaginer des ordres totaux sur d'autres ensembles, même des ensembles dont les éléments ne sont pas des nombres. Par exemple, l'ensemble des mots français est muni d'une structure d'ordre total, tout simplement en disant qu'un certain mot est plus petit qu'un autre s'il est placé avant dans le dictionnaire. On pourra écrire par exemple (un $>$ cinq) ou encore (abeille $<$ abracadabra). Bien sûr, si le mot X est placé avant le mot Y dans le dictionnaire et que le mot Y est placé avant le mot Z, X sera alors avant Z, ce qui bien la propriété que l'on a à vérifier.

Considérons donc E un ensemble totalement ordonné. On dit que E admet un *plus grand élément* x si pour tout élément $y \in E$, on a $y \leqslant x$. On dit qu'une partie $A \subset E$ admet un plus grand élément, s'il existe dans A un élément x plus grand ou égal à tous les éléments de A. Par exemple, il est facile de voir que ni $\mathbb{N}$, ni $\mathbb{Z}$, ni $\mathbb{Q}$, ni $\mathbb{R}$ n'admet de plus grand élément. Par contre, l'ensemble des mots français lui en admet un : il s'agit bien sûr du dernier mot du dictionnaire. On définit de même ce qu'est un *plus petit élément*. Là encore $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ n'admettent pas de plus petit élément et le premier mot du dictionnaire est un plus petit élément de l'ensemble des mots français. Par contre, ce coup-ci, $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément qui est 0. En fait, comme on l'a déjà plus ou moins utilisé tout à l'heure, toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

On considère toujours un ensemble totalement ordonné E et on prend maintenant en outre une partie non vide A de E. On définit maintenant la partie $A^{\geqslant}$ de E qui consiste en l'ensemble des éléments $x \in E$ qui sont plus grand ou égaux que *tous* les éléments de A. S'il existe, le plus petit élément de cet ensemble $A^{\geqslant}$ est ce que l'on appelle la *borne supérieure* de A. Prenons un exemple, l'intervalle $A =]0, 1[$. L'ensemble $A^{\geqslant}$ des majorants de A est alors l'intervalle $[1, \infty[$. Celui-ci admet un plus petit élément qui est 1 donc la borne supérieure de A existe et est 1. On définit de façon analogue la *borne inférieure* de A (*Comment ?*).

Question 8. *Montrer que si une partie $A \subset E$ admet un plus grand élément M, alors A admet une borne supérieure qui est précisément M. Montrer de même que si une partie $A \subset E$ admet un plus petit élément m, alors A admet une borne inférieure qui est m.*

Lorsqu'ils existent, le plus grand élément d'une partie $A \subset E$ se note $\max A$, le plus petit élément $\min A$, la borne supérieure $\sup A$ et la borne inférieure $\inf A$.

Une dernière définition. On considère toujours notre ensemble E totalement ordonné. Soit x un élément de E. On regarde l'ensemble X des éléments de E qui sont *strictement* plus grands que x. Si cet ensemble admet un plus petit élément, on dit que x admet un *successeur* et ce successeur est précisément le plus petit élément de l'ensemble X. Je le noterai par la suite $\mathrm{S}(x)$. Par exemple dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$, tout élément admet un successeur, le successeur de n étant $n+1$. Dans l'ensemble des mots français, tout élément à l'exception du dernier, admet un successeur, le successeur d'un mot étant le mot venant juste après dans le dictionnaire. Par contre, dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, aucun élément n'admet de successeurs. Montrons-le pour $\mathbb{R}$. Considérons donc un réel x, l'ensemble des réels strictement plus grands que x est précisément $]x, \infty[$ mais cet intervalle n'admet pas de plus petit élément (*Pourquoi ?*).

Les ordinaux dénombrables

Une bonne façon de caractériser $\mathbb{N}$ muni de son ordre est de dire qu'il s'agit du plus petit ensemble totalement ordonné admettant un plus petit élément et qui soit tel que tout élément admet un successeur. Ce que j'entends par là, c'est que si E est un autre ensemble admettant un plus petit élément et tel que tout élément de E admet un successeur alors on peut trouver une fonction strictement croissante $\mathbb{N} \to E$. Ceci est une définition rigoureuse et elle vaut ce qu'elle vaut mais il y a une façon beaucoup plus terre à terre de voir les choses. En effet, essayons de contruire un ensemble E admettant un plus petit élément et tel que tout élément de E admet un successeur. Bon, comme on l'a dit et répété E admet un plus petit élément, appelons-le 0. Maintenant ce 0 admet un successeur qui est forcément strictement plus grand que 0, appelons-le 1. Mais ce 1 aussi admet un successeur, c'est 2, et ainsi de suite. Autrement dit l'ensemble E contient au moins les éléments 0, 1, 2, 3, etc. triés de la façon suivante :

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \dots$$

et donc il est légitime de dire que $\mathbb{N}$ est le plus petit ensemble ayant ces propriétés.

On a maintenant envie de s'intéresser au plus petit ensemble E totalement ordonné admettant un plus petit élément, qui soit tel que tout élément admet un successeur et qui soit tel, aussi, que toute partie de E admet une borne supérieure. Du coup, manifestement $\mathbb{N}$ est trop petit : la partie formée de tous les entiers (ou de tous les entiers pairs) n'admet pas de borne supérieure car aucun entier n'est plus grand que tous les entiers ou autrement dit étant donné un entier, on peut toujours en trouver un plus grand. Si l'on veut continuer notre construction, il va donc falloir rajouter un élément qui va être la borne supérieure de tous les entiers et que l'on va appeler ω (lire `omega`). Mais maintenant, il lui faut un successeur et on ne l'a pas. Qu'à cela ne tienne, rajoutons-le et appelons-le $\omega + 1$. De fait, on va être obligé de rajouter $\omega + 2$, $\omega + 3$, etc. Mais là encore, ça ne va pas suffir : l'ensemble de tous les "nombres" que l'on a ajoutés jusqu'à présent ne va pas avoir de borne supérieure... On commence à voir qu'il y a un problème ici, on a peut-être en fait été trop gourmand. En effet, on ne voit pas trop comment cette construction pourrait s'arrêter, même au bout d'un temps vachement long. De façon plus précise, supposons que l'on ait réussi à fourrer dans un ensemble E tous les éléments construits ainsi, c'est-à-dire que l'on ait réussi à construire un ensemble E vérifiant les conditions que l'on s'est données. Alors cet ensemble devra admettre une borne supérieure (puisque c'est lui-même une partie de E). Cette borne supérieure sera alors forcément un plus grand élément (*Pourquoi ?*). Mais il ne peut pas y avoir de plus grand élément puisque tout élément possède un successeur qui est strictement plus grand que lui. Cela prouve qu'un tel ensemble n'existe pas.

Mais en fait, ce n'était pas si mal parti. Le problème c'est que l'on a supposé de trop de bornes supérieures existaient. Il faudrait se limiter à assurer l'existence de bornes supérieures que pour certaines parties de E, typiquement celles qui ne risquent pas d'aller à l'"infini", typiquement celles qui ne sont pas trop grandes. Un moyen d'y arriver est de se limiter aux parties dénombrables. Autrement dit, maintenant on chercher un ensemble E qui admet un plus petit élément, qui est tel que tout élément admet un successeur et qui est tel que tout partie $A \subset E$ dénombrable admet une borne supérieure.

Question 9. *En s'inspirant de la démonstration précédente, prouver que si un tel ensemble existe, il est forcément non dénombrable.*

Bon, maintenant que l'on a un peu affaibli nos hypothèses, reprenons notre construction et voyons ce qu'elle donne. On a dit que forcément tous les entiers doivent appartenir à un ensemble vérifiant de telles propriétés. Mais maintenant l'ensemble de tous les entiers, ie $\{0, 1, 2, \ldots\}$ est dénombrable et donc il doit admettre une borne supérieure. Autrement dit, on va être obligé de rajouter ω et donc de rajouter $\omega + 1$, $\omega + 2$, etc. Mais alors l'ensemble $\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots\}$ qui est dénombrable ne va pas admettre de borne supérieure. Ben, rajoutons-là et appelons-là $\omega 2$. Mais ça n'arrange pas les choses. Il nous faut encore ajouter $\omega 2 + 1$, $\omega 2 + 2$, $\omega 2 + 3$, etc. et puis la borne supérieure de l'ensemble $\{\omega 2, \omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \ldots\}$ que l'on va appeler $\omega 3$. Et ça continue, on aura ainsi $\omega 3$, $\omega 4$, etc. Voici pour l'instant les éléments que l'on a construit :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\
\omega & \omega+1 & \omega+2 & \omega+3 & \omega+4 & \omega+5 & \ldots \\
\omega 2 & \omega 2+1 & \omega 2+2 & \omega 2+3 & \omega 2+4 & \omega 2+5 & \ldots \\
\omega 3 & \omega 3+1 & \omega 3+2 & \omega 3+3 & \omega 3+4 & \omega 3+5 & \ldots \\
\omega 4 & \omega 4+1 & \omega 4+2 & \omega 4+3 & \omega 4+4 & \omega 4+5 & \ldots \\
\omega 5 & \omega 5+1 & \omega 5+2 & \omega 5+3 & \omega 5+4 & \omega 5+5 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Est-ce que c'est bon ? Peut-on s'arrêter ? Ben non, l'ensemble $\{0, \omega, \omega 2, \omega 3, \omega 4, \ldots\}$ est tout ce qu'il y a de plus dénombrable mais il n'admet pas de borne supérieure. Il faut la rajouter et naturellement on va l'appeler $\omega\omega$ ou encore ω^2. C'est reparti : il faut encore rajouter le successeur de ω^2 que l'on va appeler $\omega^2 + 1$, puis le successeur de $\omega^2 + 1$ qui est $\omega^2 + 2$, et ainsi de suite, et puis leur borne supérieure qui va être $\omega^2 + \omega$, puis le successeur de celui-ci $\omega^2 + \omega + 1$, puis le successeur de ce dernier $\omega^2 + \omega + 2$, et leur borne supérieure $\omega^2 + \omega 2$, et puis bientôt $\omega^2 + \omega 3$, $\omega^2 + \omega 4$, $\omega^2 + \omega 5$, etc. et leur borne supérieure que l'on nomera $\omega^2 + \omega^2$, soit $\omega^2 2$. Mais on peut encore continuer : on va construire ainsi $\omega^2 3$, $\omega^2 4$, etc. et l'ensemble $\{\omega^2, \omega^2 2, \omega^2 3, \ldots\}$ est dénombrable et donc on doit lui fournir une borne supérieure. Soit, appelons-là $\omega^2\omega$, ou plus simplement ω^3. On n'est toujours pas au bout de nos peines. Il va y avoir $\omega^3 + 1$, $\omega^3 + 2$ et donc $\omega^3 + \omega$, et puis $\omega^3 + \omega 2$, $\omega^3 + \omega 3$, et ainsi on va arriver à $\omega^3 + \omega^2$, puis à $\omega^3 + \omega^2 2$, à $\omega^3 + \omega^2 3$, et donc rapidement à $\omega^3 + \omega^3 = \omega^3 2$. C'est toujours pas fini : il va arriver $\omega^3 3$ puis $\omega^3 4$ et puis sans grande surprise $\omega^3\omega = \omega^4$. Puis ω^5, ω^6, etc. Et là encore l'ensemble $\{\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots\}$ est tout ce qu'il y a de plus dénombrable et il exige donc une borne supérieure. Appelons-là ω^ω, ça s'impose. C'est fini ? Et non, toujours pas : ω^ω n'a pas de successeur. Ah oui, ben rajoutons-le, c'est $\omega^\omega + 1$. Ainsi on va devoir rajouter $\omega^\omega + \omega$, puis $\omega^\omega + \omega^2$, puis $\omega^\omega + \omega^3$, etc. et ensuite leur borne supérieure qui sera $\omega^\omega + \omega^\omega = \omega^\omega 2$. On ne va pas tarder à arriver à $\omega^\omega\omega$ que l'on peut noter $\omega^{\omega+1}$. Mais lui n'a toujours pas du successeur et en brulant des étapes, on va devoir construire $\omega^{\omega+2}$, puis $\omega^{\omega 2}$, puis ω^{ω^2}, puis ω^{ω^ω}, puis $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$, etc. Et c'est toujours pas fini car l'ensemble $\left\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots\right\}$ est dénombrable et n'admet pour l'instant pas de borne supérieure. Tiens, on a peut-être un petit problème de notation ce coup-ci. Enfin, c'est pas très grave, appelons-la ε_0 (lire `epsilon zéro`) cette borne supérieure. Mais là encore ça continue... Il va y avoir $\varepsilon_0 + 1$, etc, etc... et un de ces jours $\varepsilon_0^{\varepsilon_0}$, puis $\varepsilon_0^{\varepsilon_0^{\varepsilon_0}}$ et ainsi de suite et là encore il nous manque une borne supérieure... Qu'à cela ne tienne, ajoutons-là, on n'est plus à ça près et appelons-là ε_1. Mais on va avoir le même problème avec ε_1, il va falloir créer ε_2, puis ε_3, puis dans un avenir proche ε_ω, et tant qu'on y est, $\varepsilon_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0}}$, etc. et encore leur borne supérieure que l'on nomme ce coup-ci ζ_0 (lire `zêta zéro`) . Puis bientôt ζ_1, ζ_2, ζ_ω, ζ_{ζ_0}, $\zeta_{\zeta_{\zeta_0}}$, et on commence vraiment à désespérer à arriver un jour au bout. Mais j'y pense : en faisant ces constructions, on obtient toujours des ensembles dénombrables (*Pourquoi ?*) et on a vu que si E existait il était forcément non dénombrable donc en fait on n'arrivera jamais à tous les attraper de cette façon. Il faut donc trouver un autre moyen d'appréhender le problème et c'est ce que nous allons faire.

Les bons ordres

Commençons par une définition. On dit qu'un ensemble est *bien ordonné* si toutes ses parties non vides admettent un plus petit élément. On a déjà vu un exemple d'ensemble bien ordonné, c'est $\mathbb{N}$. En fait, il y en a plein d'autres, comme nous allons le voir bientôt. Déjà, on peut dire :

Question 10. *Montrer par récurrence sur le cardinal que tout ensemble fini totalement ordonné est bien ordonné.*

Une caractérisation utile des bons ordres est la suivante. Considérons E un ensemble totalement ordonné. Alors E est bien ordonné si et seulement s'il n'existe pas de suites (infinies) d'éléments strictement décroissantes.

Question 11. *Le montrer.*

Question 12. *Montrer que si E est bien ordonné, tout élément de E sauf le plus grand élément de E s'il existe admet un successeur. Montrer que si E est bien ordonné, toute partie $A \subset E$ qui est majorée admet une borne supérieure.*

Rappelons la définition de l'ensemble que l'on cherche. Il s'agit du plus petit ensemble totalement ordonné E qui admet un plus petit élément, tel que tout élément de E admet un successeur et toute partie dénombrable de E admet une borne supérieure. Rappelons également que pour l'instant, on a vu que E était forcément non dénombrable. Nous allons adopter à present un nouvelle démarche : au lieu d'essayer de contruire E petit à petit, ce qui on l'a vu donne une idée assez précise de ce à quoi va ressembler E mais ne permet d'arriver à le construire entièrement, on va supposer qu'un tel ensemble E existe et regarder quelles propriétés il devrait vérifier.

Pour cela pour tout élément $\alpha \in E$, on va noter E_α l'ensemble des éléments de E strictement plus petits que α.

Question 13. *Montrer que le sous-ensemble de E formé des éléments α tels que E_α est dénombrable vérifie les conditions imposées à E et qu'il est plus petit que E. En déduire que pour tout $\alpha \in E$, E_α est dénombrable. Montrer, en utilisant ce précédent résultat, que E_α est bien ordonné et en déduire qu'il en est de même de E.*

On vient de voir quelque chose d'intéressant. À tout élément $\alpha \in E$, on peut associer un ensemble dénombrable bien ordonné qui n'est autre que E_α. Il serait donc peut-être pas mal de définir E comme l'ensemble des ensembles dénombrables munis d'un bon ordre[4]. Mais pour faire cela, il faudrait vérifier que si on prend un ensemble dénombrable bien ordonné, on peut le retrouver dans E et ce de façon unique, et vérifier également que si l'on prend deux ensembles dénombrables bien ordonnés différents, ils correspondent à deux éléments différents de E.

Commençons par exemple par essayer de montrer la première condition. Prenons donc X un ensemble dénombrable bien ordonné et il s'agit de le voir dans E, c'est-à-dire de trouver un $\alpha \in E$ tel que X soit E_α dans un sens à préciser. Mais bien entendu, X ne pourra être précisément E_α, car par exemple si l'on décide de prendre pour X l'ensemble des mots français et que l'on décide d'appeler les éléments de E en commençant par les entiers puis ω, puis ε_0, comme on l'a fait précédemment, on ne voit pas trop comment on pourrait retrouver les mots du dictionnaire dans E. Mais cela n'est en fait qu'une question de notation. Ce que l'on cherche, c'est en fait une bijection $f : X \to E_\alpha$, pour un certain α, qui respecte l'ordre c'est-à-dire qui est strictement croissante. Ceci est juste la façon mathématique de dire que les éléments n'ont en fait le même nom, f ne faisant qu'expliquer comment les noms se transportent de X à E.

Voyons comment l'on peut construire cette application. Il faut forcément envoyer le plus petit élément de X, disons x_0 sur le plus petit élément de E, disons 0 (*Pourquoi ?*) donc on commence ainsi. Puis il va falloir envoyer le successeur de x_0, disons x_1, sur le successeur de 0 qui est 1. Et ainsi de suite, il va falloir envoyer x_2 sur 2, x_3 sur 3 et la borne supérieure des x_n, disons x_ω, sur la borne supérieure des entiers qui est ω... et on continue ainsi. Mais, on a vu tout à l'heure que c'était désespéré. Mais ce qui était désespéré, c'était juste le fait d'arriver à épuiser E et la raison était qu'il n'est pas dénombrable, mais là c'est X que l'on veut épuiser et celui-ci est dénombrable donc il y a encore des chances que cela marche. En fait, cela marche très bien. L'idée pour le montrer est de considérer l'ensemble D des éléments de x sur lequel on peut définir f par un tel procédé. On vient de voir que tous les entiers, ainsi que ω sont dans D et ce que l'on veut prouver c'est qu'en fait $D = X$. Supposons que ce ne soit pas le cas, alors $X \backslash D$ (X auquel on a retiré les éléments de D) est non vide et donc il admet un plus petit élément, disons x. Autrement dit, x est le plus petit élément sur lequel f n'est pas défini. Mais alors, D est forcément l'ensemble des éléments de X strictement plus petits que x et D est dénombrable (car inclus dans X) dont il admet une borne supérieure disons x'.

Question 14. *Montrer que soit $x = x'$, soit x est le successeur de x' et que dans ce deux cas, on peut prolonger la fonction f à x. En déduire que f peut être définie sur tout X et qu'ainsi il existe un unique $\alpha \in E$ tel que $f : X \to E_\alpha$ soit une bijection strictement croissante.*

Le raisonnement que l'on vient de présenter est une vaste généralisation des raisonnements par récurrence classiques, c'est que l'on appelle la *récurrence transfinie*.

Le deuxième point qu'il nous fallait montrer que si l'on se donne deux ensembles bien ordonnés différents, ils correspondent à deux éléments de E qui sont différents. Mais comme on l'a déjà expliqué, cela ne peut pas être vrai, à cause de fait que l'on peut renommer les éléments. Ce que l'on peut faire, c'est choisir parmi tous les ensembles bien ordonnées qui correspondent à un même α un qui serait plus beau que les autres, un que l'on pourrait facilement distinguer. Autrement dit, donnons-nous un ensemble X dénombrable et bien ordonné et ce qu'il nous faut c'est trouver un moyen bien défini, et qui ne dépende que de l'ordre, d'appeler les éléments de X. Bien entendu, on pourrait appeler le plus petit 0, son successeur, s'il existe, 1, etc. Puis la

[4]En fait, un tel ensemble n'existe pas mais comme on n'aura pas à le considérer, ça ne va pas nous gêner.

borne supérieure de tous ces éléments, si elle existe, ω, et continuer ainsi. Mais c'est pas fameux car on a vu tout à l'heure qu'au bout d'un moment, on commençait à avoir des problèmes de notation : on a introduit ε_0 puis ζ_0 mais ça risque de continuer longtemps et l'on ne va pas pouvoir donner indéfiniment un nom (*Pourquoi ?*). Il faut donc trouver autre chose.

L'idée est de considérer comme tout à l'heure pour tout élément $x \in X$ l'ensemble X_x des éléments de x strictement plus petits que x et de remplacer systématiquement x par E_x au niveau de l'appelation. Voilà ce que cela donne pour le bon ordre $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{N}_0$ des nombres entiers strictement négatifs est l'ensemble vide. Autrement à partir de maintenant, 0 va s'appeler $\emptyset$. L'ensemble $\mathbb{N}_1$ est tout simplement le singleton $\{0\}$ et donc à partir de maintenant 1 va s'appeler $\{\emptyset\}$. Continuons : 2 va s'appeler $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 3 va s'appeler $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, et ainsi de suite. On trouve bien ici un moyen *canonique* d'appeler les éléments, il est par contre un peu lourd et on voit pourquoi il n'est pas utiliser dans la pratique. À titre d'exemple, essaie d'écrire explicitement le nombre 15 dans ce langage et admire. Une dernière chose à voir est comment s'écrit la relation d'ordre dans notre nouveau langage. Mais c'est en fait tout simple, car dire que $x \leqslant y$ signifie simplement que $E_x \subset E_y$ et donc après renomination, $x \leqslant y$ va se dire $x \subset y$.

Question 15. *Montrer qu'après renomination, $x < y$ se dit simplement $x \in y$. Montrer qu'après renomination, le successeur de x est, s'il existe, simplement l'élément $x \cup \{x\}$. Montrer qu'après renomination la borne supérieure d'une sous-ensemble $A \subset X$ (forcément dénombrable) est, si elle existe, la réunion des ensembles x, x décrivant A.*

L'ensemble obtenu après renomination est ce que l'on appelle un *ordinal dénombrable*.

Ce que l'on aimerait maintenant c'est caractériser les ordinaux dénombrables parmi les ensembles dénombrables bien ordonnés. En fait, il n'est pas difficile de voir qu'un ensemble dénombrable bien ordonné est un ordinal (dénombrable) si et seulement si la relation d'ordre sur l'ensemble est donnée par l'appartenance. Ainsi l'on peut définir un ordinal dénombrable comme étant tout simplement un ensemble dénombrable sur lequel la relation d'appartenance est une relation d'ordre total qui fait de notre ensemble un bon ordre. On montre ensuite que l'ensemble des ordinaux dénombrables est effectivement un ensemble et que c'est exactement le E que l'on recherchait. Je passe les détails. Cet ensemble n'est pas en général noté E mais plutôt $\aleph_1$ (lire `aleph un`).

Cette construction est bien jolie et se généralise très bien d'ailleurs aux ordinaux qui ne sont pas forcément dénombrables (mais nous n'allons pas détailler ce point) mais il faut dire ce qui est, elle n'est pas très intuitive. Une bonne façon à mon avis de se représenter $\aleph_1$ est la description que j'ai esquissé au début avec mes ω, mes ω^2, mes ω^ω, mais ε_0 et tout ça... bien qu'il faille se rappeler que l'on obtient ainsi que des approximations de $\aleph_1$ mais souvent dans la pratique on n'a pas besoin d'aller exhiber des ordinaux aussi grands. Il est quand même très utile de se rappeler également qu'un élément de $\aleph_1$ est un ensemble dénombrable muni d'une structure de bon ordre et que réciproquement à tout ensemble X dénombrable bien ordonné, il correspond un et un unique élément de $\aleph_1$, que l'on appelle l'*ordinal* de X.

Opérations sur les ordinaux dénombrables

Comme pour les entiers, on peut effectuer des opérations sur les ordinaux dénombrables. Il y a principalement l'addition, la multiplication et l'élévation à la puissance, ce que l'on appelle l'exponentiation. Ces opérations sont définies, comme pour les entiers, par récurrence mais pour pouvoir atteindre tous les éléments de $\aleph_1$, il va être nécessaire de faire une récurrence transfinie.

L'addition

Voyons comme cela marche pour l'addition. On choisit α un ordinal dénombrable. Et maintenant pour tout $\beta \in \aleph_1$, on veut définit $\alpha + \beta$. Bien entendu, on va poser $\alpha + 0 = \alpha$ et on va définir $\alpha + 1$ comme étant le successeur de α, $\alpha + 2$ comme étant le successeur de $\alpha + 1$ et ainsi de suite. Pour justifier ce "ainsi de suite" il va être nécessaire de distinguer deux types d'ordinaux[5] : les ordinaux qui sont des successeurs que l'on appelle *ordinaux successeurs* et les autres que l'on appelle *ordinaux limites*. Avec cette définition 0 serait un ordinal limite, mais en général on préfère l'exclure et lui donner un statut particulier. L'ordinal 1 est successeur puisque c'est par définition le successeur de 0. L'ordinal 2 aussi est successeur. Par contre l'ordinal ω lui n'est pas successeur comme on le voit facilement, c'est le plus petit ordinal limite. Maintenant, on est en mesure de donner la définition de l'addition. On pose $\alpha + 0 = \alpha$. Si β est un ordinal successeur, alors il s'écrit $\beta = \beta' + 1$ et on définit $\alpha + \beta$ comme le successeur de $\alpha + \beta'$. Si β est un ordinal limite, alors on regarde l'ensemble des ordinaux qui s'écrivent sous la forme $\alpha + \beta'$ pour un certain $\beta' < \beta$ (ie $\beta' \in \beta$). On obtient ainsi un ensemble dénombrable qui admet par définition une borne supérieure. C'est cette borne supérieure que l'on définit comme étant égale à $\alpha + \beta$.

Question 16. *Montrer que cela définit bien $\alpha+\beta$ pour tout ordinal dénombrable β. (On pourra raisonner par l'absurde et considérer le plus petit β tel que $\alpha + \beta$ ne soit pas défini et aboutir à une contradiction).*

Essayons de faire quelques calculs. Examinons dans un premier temps le cas où $\alpha = 0$. $0 + 0 = 0$ par définition. Comme 1 est le successeur de 0, $0 + 1$ est défini comme étant le successeur de $0 + 0 = 0$, donc $0 + 1 = 1$. Par récurrence, on montre que pour tout entier n, $0 + n = n$. On est maintenant en mesure de déterminer $0 + \omega$. C'est par définition la borne supérieure de tous les $0 + n = n$ pour $n < \omega$, ie n entier. Finalement $0 + \omega = \omega$. On va montrer par récurrence transfinie que pour tout $\alpha \in \aleph_1$, $0+\alpha = \alpha$. Supposons que ce ne soit pas le cas et considérons le plus petit ordinal dénombrable (qui existe bien car $\aleph_1$ est bien ordonné) α tel que $0 + \alpha \neq \alpha$. Il y a alors deux cas. Si α est successeur, on peut écrire $\alpha = \alpha' + 1$ pour un certain α' forcément strictement plus petit que α. $0 + \alpha$ est alors défini comme étant le successeur de $0 + \alpha'$. Mais $0 + \alpha' = \alpha'$ car $\alpha' < \alpha$ et donc $0 + \alpha$ est le successeur de α', c'est-à-dire α, ce qui est contradictoire. Si maintenant α est limite, il s'agit de regarder l'ensemble des ordinaux se mettant sous la forme $0 + \alpha'$ pour $\alpha' < \alpha$. Mais si $\alpha' < \alpha$, $0 + \alpha' = \alpha'$ et donc cet ensemble est précisément l'ensemble des ordinaux dénombrables strictement plus petit que α (qui n'est autre que α lui-même rappelons-le) et sa borne supérieure est α. Donc $0 + \alpha = \alpha$, ce qui est encore une contradiction. Finalement, on en déduit que pour tout $\alpha \in \aleph_1$, on a $0+\alpha = \alpha$. C'est bien.

Tiens, qu-est-ce que cette opération donne pour les ordinaux qui sont aussi des entiers. En fait, les choses se passent bien. Plus précisément :

[5] En fait, ce n'est pas nécessaire. On peut définir l'addition en disant que $\alpha + 0 = \alpha$ et si $\beta \neq 0$, $\alpha + \beta$ est la borne supérieure de l'ensemble des ordinaux qui s'écrivent comme le successeur de $\alpha + \beta'$ pour un certain $\beta' < \beta$. Cependant je trouve que l'on voit moins bien comment les choses se passent avec cette présentation.

Question 17. *Soit a et b deux entiers. Montrer par récurrence sur b que la somme $a+b$ où a et b sont vus comme des ordinaux dénombrables est précisément l'entier $a+b$.*

Continuons à faire nos calculs. $\omega+1$ est par définition le successeur de ω et donc ce que l'on avait tout à l'heure appelé innocemment $\omega+1$... quelle chance ! Quid de $1+\omega$? Voyons cela. ω est un ordinal limite, $1+\omega$ est alors défini comme la borne supérieure des $1+n$ pour $n<\omega$, c'est-à-dire n entier. Cette borne supérieure est précisément ω et donc $1+\omega=\omega$. En particulier $1+\omega \neq \omega+1$. En langage barbare, on dit que l'addition que l'on vient de définir n'est pas commutative. Par contre, elle est associative, au sens où si α, β et γ sont trois ordinaux dénombrables, on a toujours $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ et donc en général, on le note simplement $\alpha+\beta+\gamma$ sans parenthèses.

Question 18. *Montrer l'associativité en utilisant une récurrence transfinie sur γ.*

On peut en fait décrire la somme que l'on vient de définir en termes de bons ordres. Prenons α et β deux ordinaux dénombrables. Considérons maintenant A (resp. B) un ensemble dénombrable totalement ordonné d'ordinal α (resp. β). On a vu que l'on pouvoir choisir pour A l'ensemble des ordinaux dénombrables strictement plus petits que α qui est d'ailleurs précisément α, mais je préfère lui donner un nom différent. Bien entendu, la même remarque est valable pour β. Une fois cela fait, on peut considérer l'ensemble C qui est ce que l'on appelle l'*union disjointe* de A et de B. Cela signifie qu'un élément de C est soit de la forme $(0,a)$ pour $a\in A$ soit de la forme $(1,b)$ pour $b\in B$. On peut munir cet ensemble C d'un ordre total que l'on appelle l'*ordre lexicographique* (qui correspond exactement à l'ordre du dictionnaire) en disant que $(n,x)<(n',x')$ si $n<n'$ ou si $n=n'$ et $x<x'$. Ceci correspond exactement à mettre tous les éléments de la forme $(0,a)$ en premier en les triant dans le même ordre que dans A et puis ensuite à mettre ceux de la forme $(1,b)$ en gardant ici le même ordre que dans B. Pour l'analogie avec le classement du dictionnaire, on met d'abord les mots qui commencent par 0 que l'on trie comme on sait faire, puis ceux qui commencent par 1.

Question 19. *Montrer C est un ensemble dénombrable et que l'ordre que l'on vient de définir fait de C un ensemble bien ordonné.*

On en déduit que C est en correspondance avec un unique ordinal dénombrable, c'est ce que l'on a appelé l'ordinal de C. Notons γ cet ordinal.

Question 20. *Montrer par récurrence transfinie que $\alpha+\beta=\gamma$.*

La multiplication

La multiplication se définit de façon très similaire. On se donne α un ordinal dénombrable et on veut définir par récurrence transfinie, l'ordinal $\alpha\cdot\beta$ pour tout $\beta\in\aleph_1$. Si $\beta=0$, on pose $\alpha\cdot 0=0$. Si β est successeur, $\beta=\beta'+1$ et on pose $\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\beta'+\alpha$ où l'addition est celle qui a été définie précédemment. Si β est limite, on définit $\alpha\cdot\beta$ comme la borne supérieure des ordinaux dénombrables se mettant sous la forme $\alpha\cdot\beta'$ pour $\beta'<\beta$.

Question 21. *Montrer par récurrence que si a et b sont des entiers, le produit $a\cdot b$ que l'on vient de définir correspond au produit classique ab sur les entiers.*

Montrer par récurrence transfinie que pour tout $\alpha \in \aleph_1$, $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$ et $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$. Montrer par récurrence transfinie que pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \aleph_1$, on a $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ et $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$. Montrer par contre, que l'on n'a pas nécessairement $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ ni $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \gamma) + (\beta \cdot \gamma)$.

Là encore, on a une description en termes d'ensembles dénombrables bien ordonnés. Choisissons α et β deux ordinaux dénombrables et A (resp. B) un ensemble bien ordonné d'ordinal α (resp. β). On peut mettre sur le produit $B \times A$ (attention, on inverse l'ordre) l'ordre lexicographique.

Question 22. *Montrer que $B \times A$ muni de cet ordre est bien ordonné et qu'il définit ainsi un ordinal γ qui n'est autre que $(\alpha \cdot \beta)$.*

L'exponentiation

L'exponentiation, elle aussi se définit de façon très analogue. Soit $\alpha \in \aleph_1$. On pose $\alpha^0 = 1$. Si β est un ordinal dénombrable successeur, on a $\beta = \beta' + 1$ et on pose $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'} \cdot \alpha$. Si β est un ordinal limite, on regarde l'ensemble des ordinaux $\alpha^{\beta'}$ où β' parcourt les ordinaux strictement plus petits que β. On définit alors α^β comme la borne supérieure de cet ensemble.

Question 23. *Regarder si les propriétés que l'on peut penser vraies le sont effectivement. Calculer 2^ω, 2^{ω^ω}, 2^{ε_0}.*

La description avec les ensembles bien ordonnées est ici un peu plus difficile à donner mais nous n'avons peur de rien. Prenons donc α et β deux ordinaux dénombrables et A et B deux ensembles bien ordonnés d'ordinal respectif α et β. On considère maintenant C l'ensemble des fonctions f de B dans A qui sont telles que le sous-ensemble de B formé des éléments b tels que $f(b) \neq a_0$ (où a_0 est le plus élément de A) soit fini. Sur C, on peut mettre un bon ordre qui est le suivant. Prenons f et g deux fonctions distinctes de C. Dire qu'elles sont distinctes, c'est exactement dire que l'ensemble des $b' \in B$ tels que $f(b') \neq g(b')$ est non vide. D'autre part, d'après les hypothèses faites sur f et g, cet ensemble est fini donc il admet un plus grand élément, disons b. On va dire que $f < g$ si $f(b) < g(b)$ et que $f > g$ dans le cas contraire.

Question 24. *Montrer que C muni de cet ordre est un ensemble bien ordonné et que l'ordinal de C est précisément α^β.*

Question 25. *Reprendre le papier sur les jeux de Nim en supposant que le nombre d'anneaux initialement dans les piquets n'est plus un entier mais un ordinal dénombrable quelconque et qu'un coup autorisé ne consiste plus à prendre un certain nombre d'anneaux dans un certain piquet, mais à choisir pour un piquet donné, un ordinal strictement plus petit que celui qui lui était affecté. Montrer que* tous *les résultats annoncés se généralisent directement.*

D'autres opérations peut-être plus sympathiques

Prenons deux ordinaux dénombrables α et β et deux ensembles dénombrables bien ordonnés A et B d'ordinal respectif α et β. Désignons par C l'union disjointe de A et de B. On a mis tout à l'heure un bon ordre sur C en disant que les éléments de A devaient être plus petits que ceux de B mais c'est un peu arbitraire comme choix. Ce qui serait plus équitable serait de regarder tous les bons ordres que l'on peut mettre sur C qui ne contredisent ni l'ordre de A, ni celui de B. Pour chacun de ces bons ordres, on obtient un ordinal et ensuite on peut considérer la borne supérieure de tous les ordinaux que l'on a obtenus ainsi (dont on peut montrer l'existence car l'ensemble considéré est en fait dénombrable). C'est cette dernière que l'on définit comme étant la somme $\alpha \oplus \beta$. On peut faire de même pour le produit. On considère l'ensemble $A \times B$ et on regarde tous les bons ordres que l'on peut y mettre qui sont compatibles avec les ordres de A et de B. Pour chacun, on obtient un ordinal et on considère la borne supérieure de tous ces ordinaux, c'est un nouvel ordinal et c'est celui que l'on appelle $\alpha \otimes \beta$.

On définit ainsi une nouvelle addition et une nouvelle multiplication sur $\aleph_1$ qui a de bien plus jolies propriétés et notamment :

$$\begin{array}{rclcrcl}
\alpha \oplus \beta & = & \beta \oplus \alpha & \quad & (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma & = & \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) \\
\alpha \otimes \beta & = & \beta \otimes \alpha & \quad & (\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma & = & \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) \\
\\
\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) & = & (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma) & \quad & (\alpha \oplus \beta) \otimes \gamma & = & (\alpha \otimes \gamma) \oplus (\beta \otimes \gamma)
\end{array}$$

On obtient ainsi une sorte de prolongement des nombres entiers munis de leurs opérations. À partir de cela, on peut recréer le nombres relatifs qui sont associés à ces nouveaux nombres entiers, puis les rationnels, puis les réels... Il faut aussi voir qu'il n'existe pas que des ordinaux dénombrables, il existe aussi d'autres ordinaux que l'on construit à peu près de la même manière que celle présentée ici. Et sur ces ordinaux, on peut également mettre des opérations de ce genre, ce qui donne encore plus d'entiers, encore plus de rationnels, encore plus de réels.