Groupe de travail pour élèves de lycée

Le théorème de Sarkovskii

par

Olivier BENOIST

(Texte produit et tapé par Xavier CARUSO)

Le 14 septembre 2003

Table des matières

1 Introduction

1.1 Problématique

Dans tout cet exposé, I désigne l'intervalle fermé $[0,1]$ et on considère une fonction $f : I \to I$ continue. Étant donné un réel $x \in I$, on peut s'intéresser à la suite des valeurs :

$$x, f(x), f^2(x) = f \circ f(x), f^3(x) = f \circ f \circ f(x), \ldots, f^n(x), \ldots$$

L'ensemble de toutes ces valeurs est ce que l'on appelle l'*orbite* de x. Cet ensemble peut avoir des natures très diverses ; en particulier, il peut exister un entier k tel que $f^k(x) = x$, de sorte que finalement l'orbite de x se résume aux points :

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^{k-1}(x)$$

Si tel est le cas, on dit que x est un point *périodique* et le plus petit entier k tel que $f^k(x) = x$ est alors appelé la période de x.

Il faut faire attention à deux choses : premièrement, d'après notre définition un point x qui serait tel que la suite

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^n(x), \ldots$$

soit périodique mais pas à partir du début n'est pas ce que l'on appelle un point périodique. En particulier, $f(x)$ peut être périodique sans que x le soit.

Deuxièmement, ce n'est pas parce que l'on a réussi à trouver un entier k tel que $f^k(x) = x$ que l'on a prouvé que k est la période de x. En effet, cette période pourrait être un diviseur strict de k. Pour terminer la preuve, il faut en outre s'assurer que pour tout entier $1 \leqslant n < k$, on a $f^n(x) \neq x$.

Finalement si k est un entier et s'il existe un réel $x \in I$ tel que x soit périodique (pour f) de période k, on dit que k est une *période* de f. Nous nous proposons dans ce papier d'étudier l'ensemble des périodes de la fonction f.

1.2 Objectif

Plus précisément, nous allons présenter le théorème de Sarkovskii qui donne une première réponse à l'interrogation précédente. Pour cela, nous commençons par présenter l'*ordre de Sarkovskii* . Il s'agit d'un ordre sur les entiers naturels, c'est-à-dire une façon de les classer. Dessinons-le tout de suite, les explications suivront.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & 3 & \succ & 5 & \succ & 7 & \succ & 9 & \succ & 11 & \succ & \ldots \\
 & & & \succ & 2\cdot 3 & \succ & 2\cdot 5 & \succ & 2\cdot 7 & \succ & 2\cdot 9 & \succ & 2\cdot 11 & \succ & \ldots \\
 & & & \succ & 4\cdot 3 & \succ & 4\cdot 5 & \succ & 4\cdot 7 & \succ & 4\cdot 9 & \succ & 4\cdot 11 & \succ & \ldots \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & \succ & 2^n\cdot 3 & \succ & 2^n\cdot 5 & \succ & 2^n\cdot 7 & \succ & 2^n\cdot 9 & \succ & 2^n\cdot 11 & \succ & \ldots \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\succ & \ldots & \succ & \ldots & & & & & & & & & & & \\
\succ & \ldots & \succ & 2^n & & \succ & 2^{n-1} & \succ & \ldots & \succ & 4 & \succ & 2 & \succ & 1
\end{array}$$

Tous les nombres entiers (strictement positifs) ont été listés ci-dessus. Sur la première ligne, il y a tous les impairs sauf 1 ; sur la seconde, tous les doubles des nombres impairs sauf 1 ;

et ainsi de suite. Restent finalement toutes les puissances de 2 que l'on met à la fin par ordre décroissant.

Le signe « $\succ$ » signifie « est plus grand que » (pour l'ordre de Sarkovskii). Ainsi, par exemple (pour l'ordre de Sarkovskii), 3 est l'entier le plus grand. Vient ensuite 5, puis 7 et ainsi de suite. Les puissances de 2 viennent à la fin dans l'ordre décroissant. Donc 40 (qui est bien sûr 8×5) est plus grand que $48 = 16 \times 3$ mais est plus petit que $18 = 2 \times 9$. On écrit $18 \succ 40 \succ 48$.

De façon plus mathématique mais peut-être moins visuelle, on a $n \succ m$ si et seulement si on est dans l'un des quatre cas suivants :

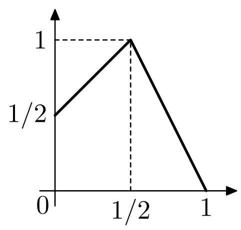
1. Il existe deux entiers $\ell < k$ tels que $n = 2^k$ et $m = 2^\ell$;
2. n s'écrit sous la forme $p \cdot 2^k$, p impair supérieur ou égal à 3 et m s'écrit sous la forme $q \cdot 2^k$, q pair ;
3. n s'écrit sous la forme $p \cdot 2^k$, p impair supérieur ou égal à 3 et m s'écrit sous la forme $q \cdot 2^k$, q impair supérieur strictement à p ;
4. n s'écrit sous la forme $p \cdot 2^k$, p impair supérieur ou égal à 3 et m s'écrit sous la forme 2^ℓ où $\ell \leqslant k$ (le cas $\ell > k$ étant déjà traité par le point 2.)

Cette définition semble un peu arbitraire sur certains choix. Elle est toutefois en accord avec le classement des entiers que l'on a donné, et c'est elle qui nous servira à la fin de la preuve du théorème de Sarkovskii ; essayons donc de la retenir en attendant.

Il est finalement temps d'énoncer le théorème de Sarkovskii.

Théorème 1 (Sarkovskii)**.** *Si f admet un point de période n, alors pour tout entier m tel que $n \succ m$, f admet un point de période m.*

Ce théorème a un corollaire immédiat peut-être plus impressionnant : si la fonction f admet un point de période 3, alors elle admet des points de toute période. Ce résultat est connu sous le nom de « période 3 implique chaos ». Il n'est par ailleurs pas bien difficile de donner un exemple, la fonction dont le graphe est représenté ci-après admet à l'évidence un point de période 3.



En effet, on a $f(0) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et $f(1) = 0$, ce qui prouve que le point 0 est périodique de période 3. Par le corollaire précédent du théorème de Sarkovskii, la fonction dont le graphe est représenté ci-dessus admet donc un point de période 17 exactement ou de période 42 exactement.

2 Discrétisation

Pour attaquer le problème, on commence par chercher non pas des points fixes à la composée f^k mais plutôt des intervalles J tels que $f^k(J) = J$. Une fois cela fait, on aura bien avancé, car une fonction continue allant de J dans J admet forcément un point fixe. C'est un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que nous rappelons ci-dessous :

Théorème 2 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit en outre y un réel compris (au sens large) entre $g(a)$ et $g(b)$. Alors il existe un réel x de l'intervalle $[a,b]$ tel que $g(x) = y$.*

Comment déduit-on de ce théorème le résultat annoncé précédemment ? Supposons par exemple que l'intervalle J soit l'intervalle $[a,b]$. Et définissons la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. Dans un premier temps, on a $g(a) = f(a) - a$ et comme $f(a) \in [a,b]$, il vient $g(a) \geqslant 0$. De même $g(b) \leqslant 0$. Ainsi, 0 est toujours compris entre $g(a)$ et $g(b)$ et donc admet un antécédent x par g. Un tel x est tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(x) = x$; c'est donc bien un point fixe de f.

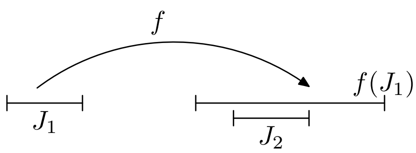
En fait, nous allons étudier un cas légèrement différent du précédent, c'est celui où non pas $f^k(J) = J$, mais celui où $f^k(J) \supset J$. Il est encore vrai dans ce cas que f^k admet un point fixe comme nous allons le voir.

Avant cela, introduisons un peu de terminologie :

Définition 1. Soient J_1 et J_2 deux intervalles inclus dans $I = [0,1]$. On dit que J_1 *surpasse* J_2 (relativement à f), et on note $J_1 \longrightarrow J_2$, si $f(J_1) \supset J_2$.

Par la suite, il nous arrivera souvent d'omettre le « relativement à f » ; cela sera toujours sous-entendu étant donné que, de toute façon, on ne manipule qu'une fonction.

Voici un petit dessin qui explique cette définition. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit exactement que l'image par f de l'intervalle J_1 est encore un intervalle ; le fait que J_1 surpasse J_2 signifie que cet intervalle est plus « grand » que J_2 :



2.1 Lemmes

Forts de la définition précédente, énonçons proprement le premier lemme, celui présenté juste ci-dessus.

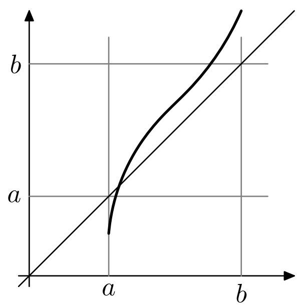
Lemme 1. *Soit $J = [a,b]$ un intervalle fermé inclus dans I. Supposons que $J \longrightarrow J$. Alors f admet un point fixe dans J. Autrement dit, il existe un réel $x \in J$ tel que $f(x) = x$.*

Prouvons ce lemme. L'hypothèse nous dit que l'intervalle $f(J)$ contient J et donc en particulier les réels a et b. Ainsi, il existe dans J, des réels x et y tels que $f(x) = a$ et $f(y) = b$. Mais alors :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= a - x \leqslant 0 \\ f(y) - y &= b - y \geqslant 0 \end{aligned}$$

La fonction g définie sur J par $g(t) = f(t) - t$ prend donc une valeur négative et une valeur positive. Elle s'annule obligatoirement par le théorème des valeurs intermédiaires, disons en un certain réel t. Pour ce réel, on a $f(t) = t$ et on a bien trouvé un point fixe à f.

De façon plus schématique, la preuve peut être résumée par le graphe suivant :



Le graphe de f (la courbe en gras sur le dessin) sort du carré d'après les hypothèses. Il doit donc couper les deux lignes horizontales. Lorsqu'il coupe celle du bas, il est en dessous de la droite d'équation $y = x$. Lorsqu'il coupe celle du haut, il est en dessus. Ces deux courbes doivent donc se croiser un jour, c'est exactement ce que dit le théorème des valeurs intermédiaires.

Précisons avant d'énoncer les autres lemmes que tous les intervalles considérés par la suite seront toujours des intervalles fermés inclus dans $[0, 1]$. Ainsi, même si par mégarde nous oublions de le préciser, cette hypothèse sera toujours implicite.

Rappelons que l'on cherche à construire des points périodiques de f, c'est-à-dire des points fixes de f^n pour un certain entier n. Mais il y a une autre condition pour être point périodique de période n : il ne faut pas être point périodique de période plus petite. Il nous faut donc en outre contrôler tous les $f^k(x)$, du moins pour $k < n$. Là encore, on essaie de s'arranger pour borner ces nombres dans certains intervalles fixés à l'avance que l'on espère pouvoir choisir plus ou moins disjoints, arrivant ainsi à être plus ou moins sûr de ne pas revenir au point de départ avant l'heure. C'est cela que précise le second lemme.

Lemme 2. *Soient $I_0, \ldots, I_n$ des intervalles (fermés) inclus dans I. On suppose que relativement à f, on a :*

$$I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_n$$

Alors, il existe $x \in I_0$, tel que pour tout k compris entre 0 et n, $f^k(x) \in I_k$.

Autrement dit, on s'est donné un itinéraire $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \ldots \rightarrow I_n$, et on cherche un point x qui suit cet itinéraire. Il est à noter que le fait que I_0 surpasse I_1 relativement à f et I_1 surpasse I_2 encore relativement à f implique que I_0 surpasse bien I_2 mais bien entendu relativement à $f \circ f$; il faut faire un peu attention.

Cela dit démontrons plutôt ce lemme. La condition « I_0 surpasse I_1 » peut se reformuler de façon plus claire et plus simple : tout $y \in I_1$ admet au moins un antécédent dans I_0. Cette reformulation permet d'éclairer le problème en suggérant la démarche suivante. On commence par choisir un x_n dans I_n. Celui-ci admet un antécédent dans I_{n-1} que l'on appelle tout naturellement x_{n-1}. À son tour, x_{n-1} admet un antécédent x_{n-2} dans I_{n-2} et ainsi de suite. On arrive ainsi à un x_0 qui suit l'itinéraire prescrit.

Maintenant, on veut combiner les deux lemmes précédents pour obtenir véritablement quelque chose qui ressemblerait à un point de période n. De façon précise, on a[1] :

Lemme 3. *Soient $I_0, \ldots, I_{n-1}$ des intervalles (fermés) inclus dans I. On suppose que relativement à f, on a :*

$$I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_0$$

Alors il existe un $x \in I_0$ tel que pour tout $k \leqslant n-1$, $f^k(x) \in I_k$ et en plus $f^n(x) = x$.

[1] Comme l'a précisé Olivier : « Plus fort... le lemme 3 ! ».

On aimerait raisonner comme précédemment : on choisit un x_n dans I_0 puis on lui choisit successivement des antécédents dans chacun des I_k jusqu'à retomber sur I_0. Le problème évidemment, c'est que l'on n'est pas sûr en faisant cela de retomber sur $x_0 = x_n$.

Toutefois l'idée n'est pas mauvaise. Cependant, il ne suffit pas de travailler avec des points mais il est nécessaire de manipuler des intervalles, ce qui complique un peu l'affaire. On commence toujours de la droite : on pose par exemple $J_n = I_0$. On veut alors construire un intervalle J_{n-1} inclus dans I_{n-1} tel que $f(J_{n-1}) = J_n$. Si l'on y parvient, par la même méthode, on saura construire successivement des intervalles J_k inclus dans I_k et tels que $f(J_k) = J_{k+1}$. Mais alors, J_0 sera inclus dans I_0 et s'enverra exactement sur I_0 par f^n. Autrement dit, J_0 se surpassera lui-même relativement à f^n et donc f^n admettra un point fixe, disons x, dans J_0. Ensuite, pour tout k, on aura bien $f^k(x) \in J_k \subset I_k$ et on aura prouvé le lemme.

Il ne reste donc plus qu'à construire J_{n-1}. Il s'agit donc de trouver un *intervalle* inclus dans I_{n-1} qui s'envoie exactement sur J_n par f. Le mot important dans la phrase précédente est « intervalle » : si l'on n'imposait pas cette condition, ce serait bien plus facile, il suffirait par exemple de prendre l'ensemble des éléments de I_{n-1} qui s'envoient dans l'intervalle J_n. Comme tout élément de J_n admet au moins un antécédent dans I_{n-1}, l'image de cet ensemble est bien J_n.

Cependant ce dernier ensemble, disons K_{n-1}, n'est en général pas un intervalle, et il va falloir sélectionner dans cet ensemble, un intervalle conservant la propriété voulue (*i.e.* son image par f est J_n tout entier). Appelons $[a, b]$ l'intervalle J_n. Déjà, dans K_{n-1}, il y a un x qui va s'envoyer sur a par f et de même il y a un y qui s'envoie sur b, et sans perte de généralité, on peut supposer $x < y$.

Si par hasard l'intervalle $[x, y]$ est tout entier inclus dans K_{n-1}, on a fini. Seulement, ce n'est pas forcément le cas. On essaie de rapprocher x et y pour que ce soit le cas. Commençons par x : on le remplace par le plus grand réel[2] de l'intervalle $[x, y]$ qui soit un antécédent de a. De même, on remplace y par le plus petit réel de l'intervalle $[x, y]$ qui soit un antécédent de b.

L'image de x est a et celle de y est b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'intervalle $[x, y]$ s'envoie au moins sur $[a, b]$, *i.e.* $f([x, y]) \supset [a, b]$. Mais en fait, il y a égalité entre ces ensembles. En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait un $t \in [x, y]$ tel que $f(t)$ soit à l'extérieur de $[a, b]$, par exemple tel que $f(t) < a$. Mais $f(y) = b > a$ et donc f devrait prendre la valeur a sur l'intervalle $[t, y]$, ce qui ne peut pas être car on a supposé que f ne prenait plus jamais la valeur a après x. On traite de la même façon le cas où $f(t) > b$.

Finalement, on a bien construit J_{n-1} ; c'est l'intervalle $[x, y]$ et donc on a fini la démonstration du lemme.

En bref, il faut retenir que les lemmes précédents permettent de retranscrire des résultats sur les intervalles en résultats sur des points, de sorte que maintenant, on n'a plus trop à se soucier de points mais plutôt plus « simplement » d'intervalles[3].

[2]Nous n'allons pas justifier son existence. Si l'on connaît un peu la définition et les propriétés de $\mathbb{R}$, c'est immédiat. Si on ne les connaît pas, on va simplement tourner en rond... c'est donc peu intéressant quoi qu'il arrive.

[3]Il y en aura un nombre fini, bien sûr, ce qui va nous simplifier considérablement la tâche.

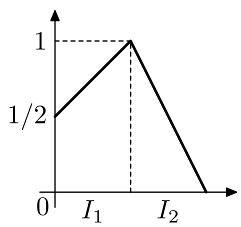
3 Le graphe de Markov

3.1 Définition

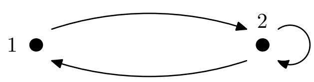
L'idée consiste à construire des itinéraires de longueur plus ou moins arbitraire et faisant apparaître des intervalles disjoints de sorte que l'on puisse être sûr que le point donné par le lemme 3 soit exactement de période n.

Pour avoir une vision plus nette de la situation, il est sans doute bon de faire intervenir les graphes. Soient $I_1, \ldots, I_n$ des intervalles fermés inclus dans I, peu importe qu'ils soient disjoints ou non pour l'instant. Le *graphe de Markov* relatif à la fonction f et à ces intervalles est par définition obtenu comme suit. On commence par dessiner n points sur la feuille, points que l'on numérote avec les entiers compris entre 1 et n, le point k représentant l'intervalle I_k. Ensuite, on relie certains de ces points par des flèches : précisément, on dessine une flècle reliant le point numéroté a au point numéroté b, si et seulement si l'intervalle I_a surpasse I_b (bien entendu relativement à f).

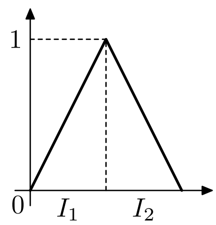
Voyons sur quelques exemples simples à quoi ressemble le graphe de Markov. Pour l'instant, on choisit $n = 2$, $I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $I_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on considère la fonction f que l'on a déjà rencontrée et dont le graphe est représenté ci-dessous.



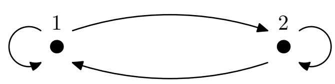
L'image de l'intervalle I_1 est exactement l'intervalle I_2 ; cela prouve que I_1 surpasse I_2, mais qu'il ne surpasse pas I_1. Ainsi dans le graphe de Markov associé, il y a une flèche qui va du point marqué 1 au point marqué 2, mais il n'y a pas de flèche reliant 1 à lui-même. Concentrons-nous désormais sur l'intervalle I_2. Son image par f est tout l'intervalle I. Ainsi I_2 surpasse à la fois I_1 et I_2. Il y a donc dans le graphe de Markov une flèche allant de I_2 vers I_1 et une flèche bouclant sur I_2. Finalement, le graphe de Markov se dessine comme suit :



Si au lieu de la fonction f, on avait pris la fonction dont le graphe est représenté ci-dessous :



on aurait obtenu un graphe de Markov différent à savoir :



En effet, cette fois, les images par f de I_1 et de I_2 sont toutes les deux $[0, 1]$ et donc ces deux intervalles surpassent tous les deux à la fois I_1 et I_2. On doit donc tracer toutes les flèches possibles.

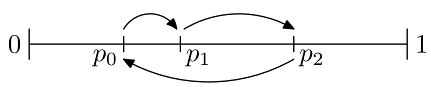
3.2 Cas particulier $\mathbf{n = 3}$

Maintenant que nous avons introduit tous les outils, nous pouvons attaquer véritablement la démonstration. Supposons que la fonction $f : I \to I$ que l'on considère admette un point de période 3. Cela signifie qu'il existe trois réels distincts p_0, p_1 et p_2 tels que :

$$f(p_0) = p_1 \quad ; \quad f(p_1) = p_2 \quad ; \quad f(p_2) = p_0$$

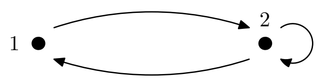
Nous laissons le lecteur se convaincre par lui-même que l'on peut sans perte de généralité supposer $p_0 < p_1 < p_2$. On définit $I_1 = [p_0, p_1]$ et $I_2 = [p_1, p_2]$. Ces deux intervalles *ne* sont *pas* disjoints, comme on aurait pu le souhaiter d'après les heuristiques données précédemment. Cependant, leur intersection se réduit au seul point p_1, ce qui sera suffisant pour la suite.

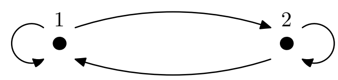
Dessinons une ébauche du graphe de Markov associé à la fonction f et aux intervalles I_1 et I_2. Pour fixer les idées, situons les points p_0, p_1 et p_2 sur la droite des réels :



les flèches indiquant l'action de f. Comme p_0 est envoyé sur p_1 et p_1 sur p_2, l'intervalle I_1 est envoyé au moins sur l'intervalle I_2. Ainsi I_1 surpasse I_2 et on ne sait *a priori* pas s'il se surpasse lui-même. Quoi qu'il en soit dans le graphe de Markov associé, il y a nécessairement une flècle reliant le point 1 au point 2.

L'intervalle I_2 lui, par contre, est envoyé au moins sur $[p_0, p_2]$. Il surpasse donc à la fois I_1 et I_2. Finalement le graphe de Markov que l'on cherche est l'un des deux suivants :





Comment utilise-t-on cette information ? Commençons par prouver qu'il existe un point de période 1, c'est-à-dire un point fixe ; c'est assez facile puisque l'on vient de voir que l'intervalle I_2 se surpassait lui-même, il suffit donc d'appliquer le lemme 1 pour conclure.

Pour les points de période 2, il nous faut trouver un itinéraire de longueur 2 qui revient au point de départ, si possible évidemment en faisant apparaître des intervalles différents, ce qui n'est pas difficile. Par exemple, il y a :

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_1$$

Le lemme 3 nous dit qu'il existe un réel $x \in I_1$ tel que $f(x) \in I_2$ et $f \circ f(x) = x$. Un tel réel x est un bon candidat à être point de période 2, il ne reste qu'à vérifier que $f(x) \neq x$. Mais si $f(x)$ égalait x, cette valeur commune serait simultanément dans I_1 et dans I_2, et donc serait p_1, il n'y a pas le choix. Mais cela n'est pas possible puisque $f(p_1) = p_2 \neq p_1$. Finalement, on a bien trouvé un point de période 2.

Traitons les points de période n, n étant un entier strictement supérieur à 3. Il s'agit de trouver un itinéraire de longueur n qui revient au point de départ, mais puisque l'on peut boucler sur I_2, on peut tout simplement choisir le suivant :

$$I_2 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_2$$

mettant à la fin le bon nombre de I_2 pour que la longueur totale soit n. Le lemme 3 nous assure l'existence d'un réel $x \in I_2$ qui suit l'itinéraire précédent et qui est tel que $f^n(x) = x$.

Il ne reste donc plus qu'à montrer qu'il n'existe aucun entier $k < n$ tel que $f^k(x) = x$. Déjà, cela ne peut pas se produire avec $k = 1$ pour la raison évoquée dans l'étude des points de période 2. Supposons qu'il existe un k compris entre 2 et $n-1$ tel que $f^k(x) = x$. Alors, en composant par f, $f^{k+1}(x) = f(x)$. Mais là encore comme x suit l'itinéraire prescrit, on doit avoir $f(x) \in I_1$ et $f^{k+1}(x) \in I_2$, ce qui prouve que $f(x) = p_1$. Encore une fois, c'est impossible, comme le lecteur pourra le démontrer lui-même.

Ceci termine la preuve dans le cas particulier de l'existence d'un point de période 3, c'est-à-dire le cas particulier du corollaire annoncé au début de ce texte. Voyons maintenant comment le cas général se traite.

4 Cas général : étude du graphe de Markov

La stratégie d'attaque est la même : on commence par appeler disons x le point périodique supposé de notre fonction f et n sa période. L'orbite de x est alors l'ensemble formé des éléments :

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^{n-1}(x)$$

Ces nombres délimitent des intervalles et on considère le graphe de Markov relativement à ces intervalles. Précisément soient $x_1, \ldots, x_n$ les éléments de l'orbite de x classés par ordre croissant : $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. En particulier, l'image par f d'un certain x_i est un autre x_j. Appelons I_i l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ et étudions le graphe de Markov de f relatiement aux intervalles I_i.

Pour cela, nous énonçons un certain nombre de propriétés permettant petit à petit de mieux appréhender ce graphe.

4.1 Propriétés

Propriété 1. *Il existe un indice a tel que l'intervalle I_a se surpasse lui-même, c'est-à-dire tel que dans le graphe de Markov, on ait une flèche reliant le sommet numéroté a à lui-même.*

Pour démontrer cela, on considère a le plus grand indice tel que $f(x_a) > x_a$. Bien sûr un tel indice existe forcément car $f(x_1)$ est l'un des x_i et est donc supérieur[4] à x_1. En outre, $f(x_n)$ est aussi l'un des x_i et donc ne peut être supérieur à x_n. Ceci prouve donc que $a < n$. Le réel x_a s'envoie *via* f sur un x_i strictement supérieur à x_a ; il s'envoie donc au-delà de x_{a+1}, ou autrement dit $f(x_a) \geqslant x_{a+1}$. De même, on a $f(x_{a+1}) \leqslant x_a$. Le théorème des valeurs intermédiaires suffit alors à prouver que tout élément de I_a a un antécédent dans I_a, ce qui signifie exactement que I_a se surpasse lui-même.

[4]Strictement supérieur car x_1 est par hypothèse un point de période n, qui ne peut donc être fixe.

Cela clôt la démonstration de la première propriété. On se rappelera par la suite que l'entier a que l'on vient de trouver vérifie, en plus de la propriété énoncée précédemment :

$$\begin{array}{rcl} f(x_a) & \geqslant & x_{a+1} \\ f(x_{a+1}) & \leqslant & x_a \end{array}$$

comme on vient de le prouver.

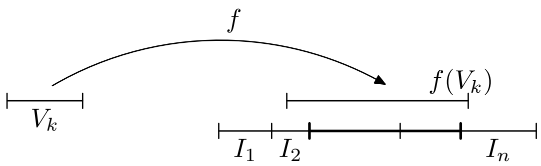
Passons à la propriété suivante qui va commencer à nous expliquer comment ce sommet particulier numéroté a est relié aux autres.

Propriété 2. *Pour tout autre sommet S du graphe, il existe un chemin reliant notre sommet étiqueté a à S.*

Pour démontrer cette seconde propriété, il nous faut introduire de nouveaux ensembles que l'on définit par récurrence. On pose $V_1 = I_a$ et on définit V_{k+1} comme la réunion de tous les intervalles I_i inclus dans $f(V_k)$. Mathématiquement, on a l'écriture suivante :

$$V_{k+1} = \bigcup_{I_i \subset f(V_k)} I_i$$

et schématiquement on a :



où V_{k+1} est le segment repassé en gras.

Ces V_k possèdent plusieurs propriétés sympathiques. En premier lieu, ce sont tous des intervalles. Ceci est passablement évident et se prouve par récurrence. L'ensemble V_1 vaut par définition I_a qui est bien un intervalle. Maintenant si V_k est un intervalle, $f(V_k)$ en est aussi un par le théorème des valeurs intermédiaires, et du coup V_{k+1} aussi comme on le voit très simplement sur le dessin précédent.

De plus, chacun des intervalles V_k contient I_a. Là encore, on procède par récurrence. Pour $k = 1$, c'est vrai par définition ; et si l'on suppose que I_a est inclus dans V_k, alors il est inclus dans $f(V_k)$ (puisque I_a est choisi pour s'envoyer au moins sur I_a) et donc dans V_{k+1}.

Prouvons maintenant que les intervalles V_k forment une suite croissante, c'est-à-dire que l'on a toujours $V_k \subset V_{k+1}$. Une fois de plus, c'est une récurrence. On a bien vu précédemment que $V_1 = I_a \subset V_2$. Supposons que V_k soit inclus dans V_{k+1}, alors $f(V_k) \subset f(V_{k+1})$ et :

$$\bigcup_{I_i \subset f(V_k)} I_i \subset \bigcup_{I_i \subset f(V_{k+1})} I_i$$

c'est-à-dire $V_{k+1} \subset V_{k+2}$. Et ceci achève la récurrence.

Pour finir avec les V_k, démontrons que pour tout entier k, $f^{k-1}(x_a) \in V_k$. Pour $k = 1$, il s'agit de prouver que $x_a \in V_1$, ce qui est vrai par définition de V_1. Si la propriété est vraie pour l'entier k, c'est-à-dire si l'on a $f^{k-1}(x_a) \in V_k$, alors en appliquant f, on obtient $f^k(x_a) \in f(V_k)$. Mais cela ne suffit pas pour conclure : il faut encore prouver qu'il existe tout un intervalle I_i inclus dans V_{k+1} et contenant x_a. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe un autre x_i dans V_{k+1}, car alors ce dernier contiendra tout l'intervalle dont les bornes sont x_a et x_i. Mais cela est évident, puisque dans V_{k-1}, il y a un x_i différent de $f^{k-1}(x_a)$ (par exemple on a vu qu'il y a au moins toujours x_a et x_{a+1}), et l'image de cet x_i par f fournit ce que l'on cherche. On conclut ainsi la récurrence.

Ce dernier point prouve que tous les nombres suivants :

$$x_a, f(x_a), f^2(x_a), \ldots, f^{n-1}(x_a)$$

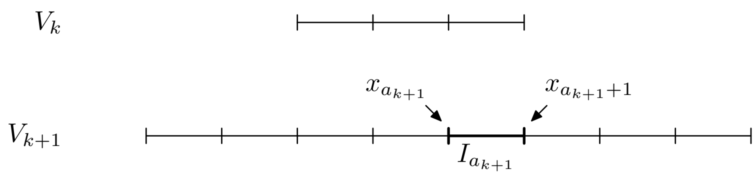
sont dans V_n (puisque la suite des V_k est croissante pour l'inclusion). Mais l'ensemble de ces nombres n'est autre que l'ensemble de tous les x_i et donc finalement $V_n = [x_1, x_n]$.

Récapitulons ce que l'on vient de construire : une suite d'intervalles V_k, chacun ayant pour extrémité deux des points x_i et vérifiant la suite d'inclusion suivante :

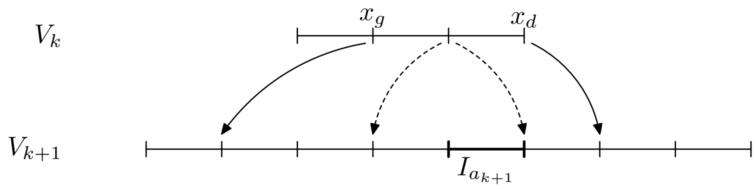
$$I_a = V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = [x_1, x_n]$$

Ces intervalles vont nous servir de guide pour trouver un chemin reliant le sommet numéroté a au sommet S : plus précisément, on cherche à sélectionner dans V_i un certain I_{a_i} (qui est donc un sous-intervalle de V_i) de façon à ce que $I_{a_i} \longrightarrow I_{a_{i+1}}$, et que S corresponde à I_{a_n}.

On procède par récurrence descendante en commençant évidemment par choisir a_n de telle sorte que l'intervalle I_{a_n} corresponde au sommet S. Supposons maintenant que $I_{a_{k+1}}$ soit construit et inclus dans V_{k+1}, et expliquons comment on sélectionne à l'intérieur de V_k un intervalle I_{a_k} qui surpasse $I_{a_{k+1}}$. Pour cela, commençons par faire un schéma :



Il y a deux cas à distinguer. Le premier est celui où il existe un $x_g \in V_k$ (qui est l'un des x_i bien entendu) dont l'image par f est inférieure ou égale à $x_{a_{k+1}}$ et un $x_d \in V_k$ dont l'image par f est supérieure ou égale à $x_{a_{k+1}+1}$. Cela ne change rien à l'affaire si l'on suppose $x_g < x_d$ et on est alors dans la situation schématisée par le dessin suivant :

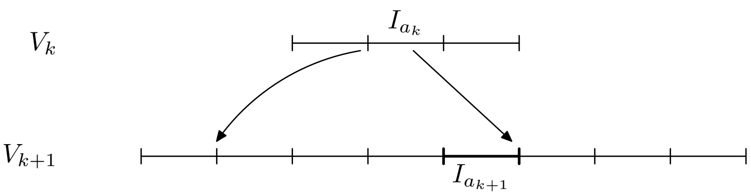


Si x_{g+1} s'envoie encore à gauche de l'intervalle $I_{a_{k+1}}$, on le remplace par x_{g+1}. Alors que si c'est à droite, on remplace x_d par x_{g+1}. En continuant ce jeu, on en arrive à supposer que x_g et x_d sont consécutifs, *i.e.* $d = g + 1$. L'intervalle $[x_g, x_d]$ est alors précisément l'intervalle I_g et son image par f contient $I_{a_{k+1}}$. Autrement dit, I_g surpasse $I_{a_{k+1}}$ et c'est lui que l'on choisit pour I_{a_k}.

Le deuxième cas est celui où tous les $x_i \in V_k$ s'envoient à gauche[5] de $x_{a_{k+1}}$. On sait que $V_{k+1} \subset f(V_k)$ et donc $x_{a_{k+1}+1}$ a un antécédent dans V_k, qui par hypothèse ne tombe pas sur

[5] Ou à droite, cela ne change strictement rien à la suite.

l'un des x_i. Il tombe donc forcément à l'« intérieur » d'un intervalle I_{a_k}. Les bornes de cet intervalle s'envoient sur des $x_i \leqslant x_{a_{k+1}}$ et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, ce I_{a_k} surpasse bien $I_{a_{k+1}}$.

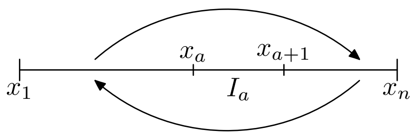


Ceci conclut la récurrence et la preuve de la propriété.

Propriété 3. *Supposons que pour tout sommet S non numéroté a, il n'existe pas de chemin de S vers le sommet numéroté a. Alors :*

1. *l'entier n est pair*
2. *f possède un point de période* 2

Commençons par faire un petit dessin où on place seulement I_a dans l'intervalle I :



Comme le suggèrent les flèches sur le dessin précédent, nous allons montrer que tous les x_i situés à gauche de x_a s'envoient par f à droite de x_{a+1} et réciproquement que tous les x_i à droite de x_{a+1} s'envoient à gauche de x_a. Mais, expliquons dans un premier temps pourquoi, si l'on arrive à faire cela, on aura réussi à prouver la propriété. Déjà, n sera forcément pair, puisqu'il y aura autant de x_i à gauche de x_a qu'à droite de x_{a+1}, f induisant évidemment une bijection sur l'ensemble des x_i. De plus, dans les conditions précédentes, on va avoir :

$$[x_1, x_a] \longrightarrow [x_{a+1}, x_n] \longrightarrow [x_1, x_a]$$

et donc le lemme 3 donnera un point $t \in [x_1, x_a]$ tel que $f(t) \in [x_{a+1}, x_n]$ et $f^2(t) = t$. Un tel point sera évidemment d'ordre 2.

Reste donc à prouver que si $x_i \leqslant x_a$, alors $f(x_i) \geqslant x_{a+1}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un $i < a$ ($i = a$ ne peut pas convenir) tel que $f(x_i) < x_{a+1}$ et donc $f(x_i) \leqslant x_a$. Considérons m le plus grand indice parmi les $i < a$ qui vérifie la condition précédente. On a :

$$\begin{array}{rcl} f(x_m) & \geqslant & x_{a+1} \\ f(x_{m+1}) & \leqslant & x_a \end{array}$$

et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'intervalle I_m surpasse I_a, et on obtient ainsi un chemin reliant I_m à I_a, chemin qui n'existe pas par hypothèse. C'est une contradiction de laquelle découle la preuve de la propriété (le cas des $x_i \geqslant x_{a+1}$ se traite de façon tout à fait analogue).

4.2 Résultats

Les propriétés précédentes vont nous être très précieuses pour décrire précisément le graphe de Markov presque dans le cas général, et d'en déduire, comme pour le cas $n = 3$, l'existence de points périodiques de périodes plus ou moins arbitraires. C'est l'objet des deux résultats suivants.

Résultat 1. *Si f admet un point de période $n > 1$ impair, alors f admet un point de période m pour tout m pair ou impair et supérieur à n.*

Pour démontrer ce résultat, on peut évidemment commencer par supposer que le n de l'énoncé est minimal pour la propriété qu'il doit vérifier. Cela signifie que l'on suppose en outre que f n'admet pas de points de période k pour tout entier k impair et strictement compris entre 1 et n.

La propriété 3 nous dit qu'il existe un chemin reliant un certain sommet S (non étiqueté a) au sommet étiqueté a. En outre, on peut fermer la boucle puisque la propriété 2 nous dit que l'on peut relier directement dans le graphe de Markov le sommet a au sommet S. Autrement dit, il existe dans le graphe de Markov au moins une boucle non triviale faisant intervenir le sommet a. Autrement dit encore, on peut trouver des indices $a_1, \ldots, a_k$ tels que l'on ait :

$$I_a \longrightarrow I_{a_1} \longrightarrow I_{a_2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{a_k} \longrightarrow I_a$$

Le but maintenant est de prouver qu'une telle boucle fait nécessairement intervenir tous les intervalles I_i, c'est-à-dire qu'elle est de longueur au moins $n + 1$, ou encore plus prosaïquement que $k \geqslant n - 2$. Par l'absurde, supposons $k < n - 2$. L'hypothèse combinée au lemme 3 nous donne l'existence d'un point fixe de f^{k+1}. Un tel point fixe fournit un point dont la période est un diviseur de $k + 1$. De plus, comme ce point suit l'itinéraire prescrit, il ne peut être point fixe de f, c'est-à-dire point de période 1. Si k est pair, $k+1$ est impair et donc strictement inférieur à n par hypothèse. Il en est de même de ses diviseurs, et donc on a trouvé un point de période impaire strictement comprise entre 1 et n, ce que l'on avait supposé faux dès le départ. Par conséquent, k est forcément impair.

Mais alors, on considère l'itinéraire suivant :

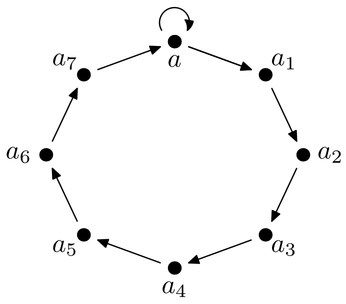
$$I_a \longrightarrow I_{a_1} \longrightarrow I_{a_2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow I_{a_k} \longrightarrow I_a \longrightarrow I_a$$

obtenu en rajoutant un I_a à la fin. Le même argument que précédemment aboutit à nouveau à une absurdité. Au final, $k \geqslant n - 2$.

Par ailleurs, si le même sommet apparaît deux fois dans un chemin, on peut raccourcir le chemin en enlevant la boucle formée. On peut donc supposer que tous les sommets apparaissent au plus une fois. Comme il n'y a que $n - 1$ intervalles, on peut choisir un chemin avec $k \leqslant n-2$. Finalement, en regroupant les deux résultats précédents, on prouve l'existence d'une boucle avec $k = n - 2$ qui fait donc intervenir une et une seule fois tous les intervalles I_i.

Une première ébauche du graphe de Markov ressemble donc à[6] :

[6]On a choisi, comme vous pouvez vous en rendre compte par vous-même, $n = 9$ pour le dessin.

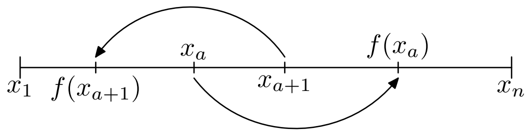


En outre comme on a vu qu'il n'existait pas de boucle passant par le sommet a et de longueur inférieure à $n-1$, il n'existe pas d'arête allant d'un sommet a_i à un sommet a_j si $j \geqslant i+2$, et ceci reste encore valable pour $i=0$ avec la convention $a_0=a$.

Déterminons désormais les images de x_i par la fonction f. On a tous les renseignements que l'on veut à propos de l'intervalle I_a : il ne surpasse que deux intervalles qui sont lui-même et I_{a_1}. Par ailleurs, on rappelle que l'on a les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(x_a) &\geqslant x_{a+1} \\ f(x_{a+1}) &\leqslant x_a \end{aligned}$$

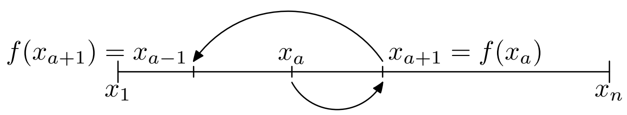
Le dessin suivant illustre ces propriétés.



Il permet de déduire que l'image de I_a contient au moins l'intervalle $[f(x_{a+1}), f(x_a)]$. Mais ces deux valeurs limites sont des x_i et donc pour que I_a ne surpasse que deux intervalles, il ne reste plus vraiment de choix :

- soit $f(x_a) = x_{a+1}$ et $f(x_{a+1}) = x_{a-1}$
- soit $f(x_a) = x_{a+2}$ et $f(x_{a+1}) = x_a$

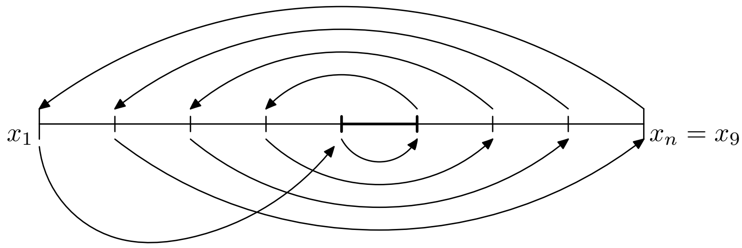
Comme les deux cas sont similaires, supposons que l'on est dans le premier. Ainsi on a déjà déterminé l'image de x_a et x_{a+1}, et on peut compléter le dessin :



De surcroît, on récupère $a_1 = a-1$.

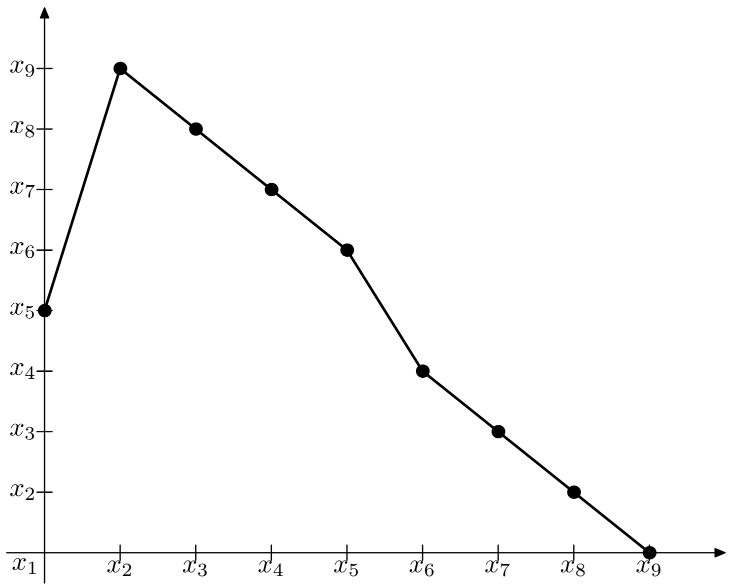
On peut maintenant déterminer l'image de x_{a-1}. Pour cela on regarde l'intervalle $I_{a_1} = I_{a-1}$. D'après le graphe de Markov, il surpasse I_{a_2}, éventuellement I_a et aucun autre. Là encore, pour arriver à concilier tout ces contraintes, il n'y a pas le choix : x_{a-1} s'envoie obligatoirement sur x_{a+2}. En réitérant l'argument, on déduit que la situation[7] est nécessairement celle illustrée par le dessin suivant finalement complet :

[7]Situation représentée pour simplifier encore une fois dans le cas $n=9$.



Nous n'avons que peu annoté la figure pour ne pas la surcharger mais évidemment les points marqués sur le segment correspondent successivement aux valeurs x_1, x_2, jusqu'à x_n. Le segment repassé en gras est l'intervalle I_a ; en particulier son extrémité de gauche est x_a et son extrémité de droite est x_{a+1}. On lit donc sur le dessin précédent que forcément $a = 5$ dans le cas où $n = 9$. Dans le cas général on a $a = \frac{n+1}{2}$.

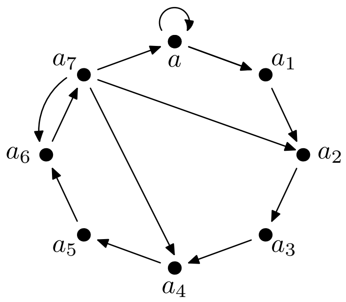
On peut donner en plus le graphe[8] d'une fonction f vérifiant les conditions que l'on étudie depuis tout à l'heure. À ce niveau, ce n'est plus difficile. Par exemple :



Revenons au graphe de Markov et examinons en quoi la description précédente permet de le préciser. On constate que l'intervalle $[x_1, x_2]$ s'envoie au moins sur l'intervalle $[x_a, x_n]$. Ainsi I_1 surpasse $I_a, I_{a+1}, \ldots, I_{n-1}$, ce qui ajoute de nouvelles arêtes au graphe de Markov. Précisons lesquelles.

L'intervalle I_a correspond au sommet numéroté a, il n'y a pas de souci de ce côté. Si l'on regarde un peu plus attentivement ce qui vient d'être fait, on observe que I_{a+1} correspond au sommet numéroté a_2, que I_{a+2} correspond au sommet a_4, et de façon générale que I_{a+k} correpond au sommet a_{2k}. De même, l'intervalle I_{a-1} correspond au sommet a_1 (comme on l'a déjà remarqué), l'intervalle I_{a-2} correspond au sommet a_3 et de façon générale, l'intervalle I_{a-k} correspond au sommet a_{2k-1}. Sur le graphe de Markov, on a les nouvelles arêtes partant du sommet a_{n-2} et arrivant aux sommets a_{2k} pour tout entier k compris entre 1 et $\frac{n-3}{2}$. Si l'on complète notre précédent dessin, on obtient donc :

[8]Graphe improvisé au tableau sur demande de Joël...



On est maintenant apte à trouver tous les itinéraires qui bouclent de longueur souhaitée. Plus précisément pour un itinéraire de longueur 2, il suffit de considérer :

$$I_{a_{n-2}} \longrightarrow I_{a_{n-3}} \longrightarrow I_{a_{n-2}}$$

ce qui correspond dans le cas dessiné à :

$$I_{a_7} \longrightarrow I_{a_6} \longrightarrow I_{a_7}$$

Pour un itinéraire de longueur 4, on choisit :

$$I_{a_{n-2}} \longrightarrow I_{a_{n-5}} \longrightarrow I_{a_{n-4}} \longrightarrow I_{a_{n-3}} \longrightarrow I_{a_{n-2}}$$

et ainsi de suite. De cette façon, on obtient des itinéraires dont la longueur est un entier pair inférieur à n. Maintenant, si on a un tel itinéraire, disons de longueur m, on obtient un point de période exactement m. En effet, le lemme 3 nous assure l'existence d'un point fixe à f^m qui suit l'itinéraire en question. Il faut alors faire un peu attention pour prouver que le point est bien périodique de période exactement m, mais cela fait appel aux techniques qui ont été déjà présentées plusieurs fois et que nous n'allons pas expliquer une nouvelle fois...

Pour créer des itinéraires de longueur supérieure à n, il suffit de faire tout le tour du graphe et ensuite de boucler sur a autant de fois que nécessaire. On obtient encore par le lemme 3 l'existence d'un point dont la période est exactement la longueur de l'itinéraire.

Tout cela démontre finalement le résultat 1. Passons donc fièrement au suivant qui explique ce qui se passe lorsque f admet un point non pas de période impaire, mais de période paire.

Résultat 2. *Si f admet un point de période paire, alors f admet un point de période* 2.

Il y a ici deux cas à distinguer : soit il n'existe pas dans le graphe de Markov de sommet S qui peut être relié à I_a, soit il en existe un. Dans le premier cas, on a vu (propriété 3) que f admettait un point de période 2 ; c'est donc fini.

Dans le second cas, il s'agit de recopier la démonstration précédente pratiquement mot pour mot : on commence par considérer une boucle de longueur paire minimale dans le graphe de Markov qui contient le sommet a, on démontre ensuite que cette boucle fait intervenir tous les autres sommets, on construit l'escargot, on complète le graphe de Markov et on conclut. Nous nous contenterons de la démarche, laissant au lecteur courageux le soin d'écrire complètement la démonstration.

5 Preuve du théorème de Sarkovskii

Après les lemmes, les propriétés et les résultats, passons aux propositions[9].

[9]Apparemment, ça amuse bien Olivier.

5.1 Propositions

Pour terminer la démonstration, nous allons principalement appliquer les deux résultats précédents, non pas à la fonction f elle-même, mais à certaines de ses puissances. Il nous faut donc en premier lieu comprendre comment un point périodique de f permet d'en récupérer un de f^h et réciproquement comment un point périodique de f^h permet d'en récupérer un de f, h étant ici un entier positif quelconque. Voici une proposition qui donne un énoncé précis :

Proposition 1. *Soit $f : I \to I$ une fonction continue. Soit h un entier strictement positif.*

- *Si f admet un point de période n, alors f^h admet un point de période $\frac{n}{\mathrm{P}\textsc{gcd}(n,h)}$.*
- *Si f^h admet un point de période n, alors il existe un entier d diviseur de h et premier avec n, tel que f admette un point de période $\frac{nh}{d}$.*

Débutons par une remarque simple mais très utile : on considère x un point périodique de f de période exactement n. On a alors l'équivalence suivante : $f^k(x) = x$ si et seulement si k est un multiple de n. Cela donne donc une caractérisation simple et facilement exploitable de la période.

Pour le premier point, on sait par hypothèse qu'il existe un réel $x \in I$ tel que :

$$f^k(x) = x \iff n \text{ divise } k$$

et il nous reste à chercher une condition équivalente de même nature à $(f^h)^k(x) = x$. On écrit :

$$\begin{aligned}
(f^h)^k(x) = x &\iff f^{hk}(x) = x \\
&\iff n \text{ divise } hk \\
&\iff \frac{n}{\mathrm{P}\textsc{gcd}(n,h)} \text{ divise } \frac{h}{\mathrm{P}\textsc{gcd}(n,h)} \cdot k \\
&\iff \frac{n}{\mathrm{P}\textsc{gcd}(n,h)} \text{ divise } k
\end{aligned}$$

la dernière équivalence résultant du théorème de Gauss. On conclut alors directement.

Traitons à présent le second point. On pourrait utiliser une méthode analogue mais appuyons-nous plutôt sur le cas déjà traité. Notons x un point périodique de période n de f^h. Alors il est bien évident que x est aussi un point périodique de f. Notons m sa période. D'après le cas précédent, on a :

$$n = \frac{m}{\mathrm{P}\textsc{gcd}(m,h)}$$

d'où en multipliant par h :

$$nh = m \cdot \frac{h}{\mathrm{P}\textsc{gcd}(m,h)}$$

Il ne reste plus qu'à appeler d le quotient $\frac{h}{\mathrm{P}\textsc{gcd}(m,h)}$ qui est bien un entier. Les expressions obtenues pour les entiers n et d nous assurent qu'ils sont premiers entre eux et aussi que n est un diviseur de h.

5.2 La démonstration

On conserve la fonction $f : I \to I$ continue. On considère deux entiers n et m tels que $n \succ m$ (donc pour l'ordre de Sarkovskii défini au début de ce texte). On suppose finalement que f admet un point de période n ; et il s'agit de montrer qu'elle en admet un de période m.

On rappelle que l'on avait donné une condition équivalente au fait que $n \succ m$. Elle distinguait quatre cas que nous allons maintenant traiter tour à tour.

• Le premier cas était celui où il existe deux entiers $\ell < k$ tels que $n = 2^k$ et $m = 2^\ell$. Si $\ell = 0$, il s'agit de trouver un point fixe de f et nous avons déjà vu que ceci est une conséquence immédiate du théorème des valeurs intermédiaires. Supposons $\ell \geqslant 1$. Par hypothèse, f admet un point de période 2^k. On considère la fonction $f^{m/2}$. D'après la proposition précédente, elle admet un point de période :

$$\frac{2^k}{\mathrm{PGCD}\,(2^{\ell-1}, 2^k)} = \frac{2^k}{2^{\ell-1}} = 2^{k-\ell+1}$$

L'exposant $k-\ell+1$ est strictement positif (même supérieur ou égal à 2), et donc le nombre $2^{k-\ell+1}$ est pair. On en déduit grâce au résultat 2 que $f^{m/2}$ admet un point de période exactement 2. Mais alors en appliquant la seconde partie de la proposition précédente, on trouve l'existence d'un entier d tel que f admette un point de période $\frac{n}{d}$. En outre, d doit être un diviseur de $\frac{n}{2} = 2^{k-1}$ et doit être premier avec 2 ; la seule solution est alors $d = 1$ et par voie de conséquence f admet bien un point de période n.

• Le second cas est celui où n s'écrit sous la forme $p2^k$ où k est un entier et p un entier impair au moins égal à 3 et où m s'écrit sous la forme $q2^k$, q étant pair. Dans ce cas, on regarde l'itéré f^{2^k}. Toujours d'après la proposition, elle admet un point de période $\frac{p2^k}{\mathrm{PGCD}(p2^k, 2^k)} = p$. Comme p est impair et au moins égal à 3, d'après le résultat 1, f^{2^k} admet un point de période q, ce dernier nombre étant pair. Finalement, on revient à f et on obtient l'existence d'un point de période $\frac{q2^k}{d} = \frac{m}{d}$ où d est un entier divisant 2^k et premier avec q. Comme précédemment, un tel entier est forcément égal à 1 et f admet bien un point de période m.

• On regarde maintenant le cas où n s'écrit encore sous la forme $p2^k$, p toujours impair au moins égal à 3, mais où m s'écrit ce coup-ci sous la forme $q2^k$, q étant lui aussi impair et donc strictement supérieur à p. On commence comme dans le cas précédent : on regarde la fonction f^{2^k} ; elle admet un point de période p et donc de période q encore grâce au résultat 1. Ainsi f admet un point de période $\frac{m}{d}$, d étant un diviseur de 2^k premier avec q. Il est donc une puissance de 2 inférieure à 2^k disons 2^ℓ. Et finalement, on obtient un point de période $q2^{k-\ell}$ pour f.

Seulement, ce n'est pas ce que l'on souhaite, si $\ell > 0$. Cela dit, ce n'est pas grave, car l'on peut maintenant appliquer le cas précédent. Comme f admet un point de période $q2^{k-\ell}$, elle admet un point de période $r2^{k-\ell}$ pour tout nombre pair r. Il suffit de choisir $r = q2^\ell$ qui est bien pair si $\ell > 0$.

• Passons finalement au dernier cas. Désormais n s'écrit sous la forme $p2^k$, p étant toujours un nombre impair supérieur ou égal à 3, et m s'écrit 2^ℓ avec $\ell \leqslant k$. Par hypothèse f admet un point d'ordre $p2^k$. Elle admet donc *via* le deuxième cas de cette étude un point d'ordre 2^{k+1}. Maintenant, le premier cas permet de conclure, ℓ étant strictement inférieur à $k+1$.

Le théorème de Sarkovskii est finalement prouvé !

5.3 Compléments

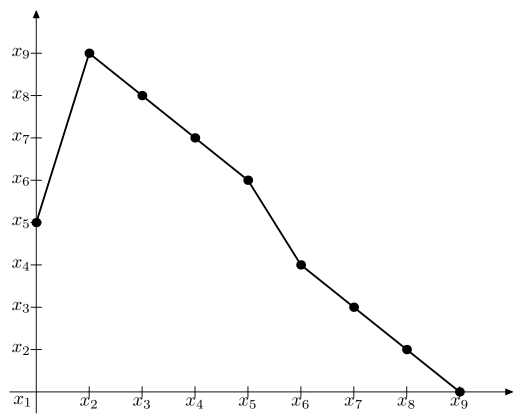
Une fois le théorème de Sarkovskii acquis, on peut se demander s'il est optimal. Il y a sûrement plein de façons de formuler précisément la question précédente, mais nous allons nous intéresser à la suivante : soient n et m deux entiers tels que $m \not\succ n$, existe-t-il alors forcément une fonction $f : I \to I$ qui admette un point de période n mais qui n'en admette pas de période m ?

On peut reformuler encore une fois cette question. Soit n un entier. Existe-il une fonction $f : I \to I$ qui admette un point de période n (et donc de période m pour tout entier m inférieur à n pour l'ordre de Sarkovskii) mais qui n'admette aucun point de période m pour tout entier m inférieur à n toujours pour l'ordre de Sarkovskii.

Les deux questions précédentes ne sont en fait *a priori* pas tout à fait les mêmes. Toutefois, la réponse aux deux est affirmative et nous nous proposons dans la suite d'illustrer cela en prouvant le théorème suivant qui est un cas particulier du résultat annoncé :

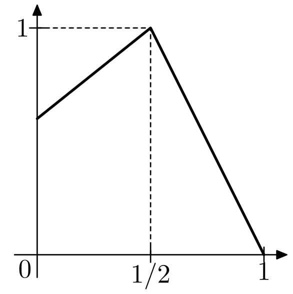
Théorème 3. *Soit n un entier impair au moins égal à 5. Alors il existe une fonction $f : I \to I$ qui admet un point de période n mais aucun point de période $n-2$. En particulier, justement d'après le théorème de Sarkovskii, elle admet aucun point de période m pour tout entier m impair compris strictement entre 1 et n.*

Nous avons en fait déjà rencontré une fonction solution du problème. Il s'agit de celle dont on a donné le graphe, graphe que nous rappelons ci-contre.



Certes, il n'est pas évident que cette fonction soit solution, mais il est par contre clair, si on l'a bien suivi et bien compris les étapes de la preuve du théorème de Sarkovskii, que si solution il y a, elle doit y ressembler. En effet, cette fonction a été construite précisément pour avoir le graphe de Markov « minimal », c'est-à-dire sur lequel les seules arêtes sont celles qui découlent du raisonnement.

Il faut en outre comprendre que le graphe précédent ne correspond en fait pas à une fonction précise mais à toute une classe de fonctions : on a libre choix sur les valeurs de x_i. Évidemment, on peut choisir de les répartir uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$, ce qui correspond à prendre $x_i = \frac{i-1}{n-1}$, mais on peut aussi faire des choix plus intelligents. Précisément, on peut s'arranger pour enlever les deux cassures dans la partie située à droite de x_2 et on peut même s'arranger pour fixer les valeurs de x_1, x_2 et x_n. Concrètement, on choisit $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$ et $x_n = 1$, ce qui correspond au graphe suivant :



Il reste à déterminer la valeur de $f(0)$ pour que 0 soit un point périodique de période n. Pour fixer les idées, définissons les entiers a et b de telle façon que la fonction f soit définie par :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) = ax + b & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ f(x) = 2 - 2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$$

Le réel b est alors $f(0)$ et on a en outre la condition $\frac{1}{2}a + b = 1$, qui n'importera pas en réalité.

Nous voulons déterminer b. Nous allons en fait résoudre un problème un peu plus général qui nous sera utile par la suite : on considère x_0 un réel[10], et on pose :

$$\begin{cases} x_1 = g(x_0) \\ x_{k+1} = 2 - 2x_k \quad \text{pour } k \geqslant 1 \end{cases}$$

et on cherche à déterminer x_{2s+1} en fonction de x_0, s étant un entier fixé à l'avance. Moralement, donc, on cherche à calculer la $(2s+1)$-ième itérée de f en x_0, sans se préoccuper (pour l'instant) d'encadrements ou de choses de ce type ; on suppose simplement que x_0 est toujours envoyé selon l'équation de la droite de gauche et qu'ensuite tous les autres sont envoyés selon l'équation de la droite de droite...

Résolvons la récurrence. Comme le préconise la méthode classique, on remarque que l'équation définissant x_{k+1} pour $k \geqslant 1$ peut se réécrire sous la forme :

$$x_{k+1} - \frac{2}{3} = -2\left(x_k - \frac{2}{3}\right)$$

Ainsi la suite des $x_k - \frac{2}{3}$ est géométrique de raison (-2) et donc on a la formule explicite suivante :

$$x_{2s+1} - \frac{2}{3} = (-2)^{2s}\left(x_1 - \frac{2}{3}\right)$$

soit

$$x_{2s+1} - \frac{2}{3} = 4^s\left(g(x_0) - \frac{2}{3}\right)$$

On voit ici avec les yeux que la fonction $x_0 \mapsto x_{2s+1}$ est affine de pente $4^s a$. De surcroît, il est aisé de déterminer son point fixe que l'on note $x_{2s+1}^{(f)}$. Il vérifie :

$$\begin{aligned} x_{2s+1}^{(f)} - \frac{2}{3} &= 4^s\left(g\left(x_{2s+1}^{(f)}\right) - \frac{2}{3}\right) \\ g\left(x_{2s+1}^{(f)}\right) - \frac{2}{3} &= \frac{1}{4^s}\left(x_{2s+1}^{(f)} - \frac{2}{3}\right) \\ g\left(x_{2s+1}^{(f)}\right) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4^s}\left(x_{2s+1}^{(f)} - \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

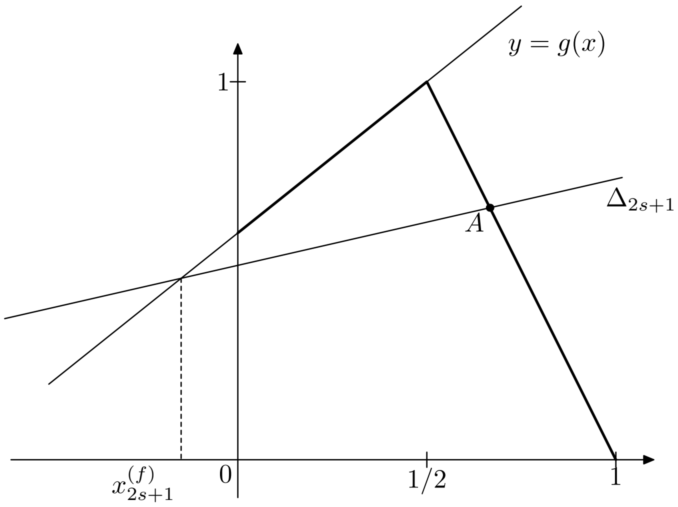
Autrement dit, c'est l'abscisse du point d'intersection de la droite de gauche avec la droite (Δ_{2s+1}) d'équation :

$$x \mapsto \frac{2}{3} + \frac{1}{4^s}\left(x - \frac{2}{3}\right)$$

qui n'est autre que la droite de pente $\frac{1}{4^s}$ qui passe par le point A de coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Voici un petit dessin qui récapitule le calcul précédent :

[10] Qu'il soit compris entre 0 et $\frac{1}{2}$ n'est vraiment pas le point crucial, ici.



Expliquons à présent comment ce problème est utilisé pour déterminer la fonction g telle que le point 0 soit de période n pour f. Posons $n = 2t + 1$. On souhaite que la droite Δ_{2t+1} recoupe la droite d'équation $y = g(x)$ à l'abscisse $x = 0$. On choisit donc g de cette façon : c'est l'équation de la droite qui passe par le point d'intersection de Δ_{2t+1} et de l'axe des ordonnées et par le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Justifions que ce choix fait bien de 0 un point d'ordre n. On sait désormais que la suite x_i définie par :

$$\begin{cases} x_1 = g(0) \\ x_{k+1} = 2 - 2x_k \quad \text{pour } k \geqslant 1 \end{cases}$$

vérifie $x_{2t+1} = 0$. En remontant, on obtient $x_{2t} = \frac{1}{2}$ puis à $x_{2t-1} = \frac{3}{4}$. On prouve facilement que la suite des x_{2k} est croissante, et que celle des x_{2k+1} est décroissante. De cela, on déduit que x_k est toujours compris entre $\frac{1}{2}$ et 1 si k est compris entre 1 et $2t$. Ainsi la suite x_i (avec $0 \leqslant i \leqslant n$) calcule les itérés successifs de f en 0, et donc $f^n(0) = x_n = x_{2t+1} = 0$

En résumé, nous venons de construire une fonction qui admet un point de période n. Comme nous l'avons dit dès le début, cette fonction n'est qu'une « déformation » de la première citée dans cette section et c'est même ainsi que nous avons eu l'idée de la considérer. Toutefois, il importe peu finalement que vous soyez ému par ce dernier argument, vous pouvez vous dire simplement que nous venons de sortir cette fonction de notre chapeau, que nous venons de prouver qu'elle a un point de période exactement[11] n et que maintenant, nous allons prouver que pour tout m impair compris entre 3 et $n - 2$, elle n'a aucun point de période m. Ceci conclura[12].

Soit m un entier impair compris entre 3 et $n - 2$. On remarque en premier lieu qu'il suffit de prouver que $f^m(x)$ est toujours différent de x ; il n'est pas utile ici de se soucier du « exactement ». En outre, si f^m admet un point fixe, disons x, alors f^m admet aussi un point fixe dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$: en effet, l'orbite (sous f) du point x ne peut être entièrement incluse dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (car dans cet intervalle f est donnée par la formule $x \mapsto 2 - 2x$ et il est facile de voir que cette dernière fonction n'admet pas de point périodique de période impaire).

Raisonnons par l'absurde : supposons que f^m admette un point fixe, disons x_0. D'après ce qui précède, on peut supposer que $x_0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. On s'intéresse à l'orbite de ce x_0 sous f

[11] Au fait, pourquoi « exactement » ? Est-ce clair avec ce que l'on a fait jusqu'à présent ?

[12] Remarquez finalement que si pour vous le résultat de la dernière note de bas de page n'était pas clair, il le deviendra avec cette propriété.

et plus précisément, on appelle $x_k = f^k(x_0)$. Par hypothèse $x_m = x_0$. Soit ℓ le plus petit indice tel que x_ℓ retombe dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Avant cet indice, la suite des x_k est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = g(0) \\ x_{k+1} = 2 - 2x_k \quad \text{pour } 1 \leqslant k \leqslant \ell \end{array} \right.$$

On a déjà étudié cette suite et on a en particulier démontré que si k est pair x_k est supérieur à $\frac{2}{3}$. Ceci prouve que ℓ est impair.

Par ailleurs, on a $x_\ell > x_0$. En effet, on a vu que la fonction $x_0 \mapsto x_\ell$ est affine et que sa pente est donnée par $a \cdot 4^{\frac{l-1}{2}}$. Ce dernier nombre est strictement supérieur à 1, a étant strictement supérieur à $\frac{1}{4}$: si a était inférieur à $\frac{1}{4}$, $g(0)$ serait supérieur à $\frac{7}{8}$ et il est manifestement inférieur à $\frac{2}{3}$. Cela implique que si $x_0 > x_\ell^{(f)}$, alors $x_\ell > x_0$. Or lorsque ℓ décroît, la pente de Δ_ℓ croît et donc la droite Δ_ℓ coupe de plus en plus vers la gauche la droite d'équation $y = g(x)$. (Les sceptiques pourront toujours écrire les équations et vérifier que $x_\ell^{(f)}$ est croissant avec ℓ). Ici, comme $\ell \leqslant m < n$, il vient $x_\ell^{(f)} < x_0$ et donc bien $x_\ell > x_0$.

Le raisonnement que l'on vient de faire prouve que si l'on regarde la sous-suite de (x_k) formée des éléments qui tombent dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on obtient une suite strictement croissante. Or, ceci est en contradiction avec le fait que $x_m = x_0$. Au final, on a la conclusion annoncée.

Bibliographie commentée

Les prérequis nécessaires pour comprendre cet exposé sont très faibles : il s'agit simplement d'avoir une bonne appréhension de la notion de fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de savoir manipuler le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci est normalement exigible d'un élève de terminale.

Si toutefois, on veut aller plus loin, et mieux comprendre les résultats admis en terminale et les propriétés fondamentales des nombres réels, on pourra se rapporter à n'importe quel manuel d'analyse, niveau deug ou niveau prépa.

La partie 5.3 ne répond pas entièrement à la question de l'optimalité du théorème de Sarkowskii. Cette question est toutefois traitée dans l'article [1]. De nombreuses autres questions se posent une fois le théorème de Sarkowskii prouvé. Par exemple, on peut se demander s'il n'existe pas des « espaces » autres que le segment sur lequel il est vrai. Il est prouvé dans [2] que le théorème de Sarkovskii a un équivalent sur le cercle.

Enfin, on ne peut pas oublier de mentionner que l'exposé précédent est entièrement inspiré de [3]. Bien que les deux articles se ressemblent fortement, il est probablement enrichissant de lire parallèlement les deux textes.

Références

[1] L.S. Block, W.A. Coppel, *Dymanics in one dimension*, Lectures notes in mathematics **1513**, Springer, 1992

[2] L. Block, J. Guckenheimer, M. Misiurewicz, L.S. Young, *Periodic points and topological entropy of one dimensional maps* in *Global theory of dynamical systems* (par Z. Nitecki, C. Robinson), Lectures notes in mathematics **819**, Springer, 1980

[3] `http://www.dma.ens.fr/culturemath/contenu/dossiers.html#sharkovskii`