Groupe de travail pour élèves de lycée

Colorie-moi le ciel !

par

Pierre Bornsztein

(Texte produit et tapé par Xavier Caruso)

Le 14 décembre 2003

Table des matières

1 Coloriages à la Ramsey

1.1 « Hmm... on se connaît ? »

Prouver que dans tout groupe de six personnes, il y a en trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui, deux à deux, ne se connaissent pas. (Bien entendu, la relation « se connaître » est supposée symétrique).

Voici un exercice classique que tout élève participant occasionnellement à des compétitions mathématiques a pu rencontrer une fois dans sa vie. L'exercice en soi n'est pas franchement difficile, on procède de la façon suivante : on isole une personne, disons Pierre. Il y a alors deux cas : soit Pierre connaît au moins trois personnes, soit il y en a trois qu'il ne connaît pas du tout. Les deux cas se traitent de la même façon, supposons que l'on est dans le premier : Pierre connait trois personnes que l'on appelle Mehdi, Dolphi et Xavier. Alors soit, par exemple, Dolphi connaît Xavier et donc avec Pierre, ils forment un groupe de trois personnes qui se connaissent mutuellement, soit, aucun des trois du groupe Mehdi, Dolphi, Xavier ne se connaît et donc ils forment un groupe de trois personnes qui ne se connaissent pas. On conclut par des arguments analogues dans tous les cas.

On peut donner une illustration un peu plus visuelle de ce problème en terme de graphes. On dessine six points sur notre feuille, chacun représentant une personne du groupe, on relie par un trait rouge deux points correspondant à deux personnes qui se connaissent et par un trait bleu des points correspondant à deux personnes qui ne se connaissent pas. Avec cette interprétation, il s'agit de montrer qu'il existe forcément un triangle *monochromatique* (*i.e.* dont les trois côtés sont de la même couleur).

La généralisation plus ou moins évidente consiste à ne plus rechercher des triangles monochromatiques mais plutôt des quadrilatères ou des figures plus compliquées. Nous allons nous intéresser particulièrement aux *ℓ-cliques monochromatiques*, c'est-à-dire aux ensembles de ℓ sommets tels que les arêtes reliant deux quelconques de ces sommets soient toutes de la même couleur. Par exemple, si $\ell = 4$, on ne cherche pas simplement un quadrilatère monochromatique mais on souhaite en outre que les diagonales de ce quadrilatère aient la même couleur que les côtés.

On se donne deux entiers ℓ_1 et ℓ_2 et on se demande à partir de combien de personnes n, le graphe des connaissances contient soit une ℓ_1-clique rouge soit une ℓ_2-clique bleue. Sans parler de graphes, on cherche un entier n tel que l'énoncé suivant soit vrai : « Dans tout groupe de n personnes, il y en a ℓ_1 qui se connaissent mutuellement ou ℓ_2 qui, deux à deux, ne se connaissent pas ». Notez qu'il n'est *a priori* pas du tout certain qu'un tel entier n existe toujours... mais c'est pourtant vrai et c'est ce que nous allons voir.

Traitons le cas $\ell_1 = 4$ et $\ell_2 = 3$. La preuve ressemble étrangement à celle que l'on a déjà donnée pour le cas $\ell_1 = \ell_2 = 3$. Montrons que $n = 10$ convient. On commence par isoler une personne, disons encore Pierre. Parmi les neuf autres, soit Pierre en connaît au moins 6, soit il n'en connaît pas au moins 4. Dans le premier cas, on utilise le résultat déjà prouvé pour $\ell_1 = \ell_2 = 3$; il dit que parmi les six personnes que connaît Pierre, il y en a 3 qui se connaissent mutuellement ou 3 qui, deux à deux, ne se connaissent pas. Dans la première éventualité, ces trois personnes forment avec Pierre un groupe de quatre personnes qui se connaissent deux à deux. Dans la seconde éventualité, on a déjà trouvé un groupe de trois personnes qui, deux à deux, ne se connaissent pas.

Voyons le deuxième cas, c'est-à-dire le cas où Pierre ne connaît pas 4 personnes. Si les quatre personnes en question se connaissent mutuellement, c'est bon. Sinon, c'est que deux d'entre elles ne se connaissent pas et donc forment avec Pierre un groupe de trois personnes qui ne se connaissent pas deux à deux. Dans tous les cas, on a bien répondu à la question.

Notons $R(\ell_1, \ell_2)$ le nombre minimal de personnes qu'il faut mettre dans l'assemblée pour qu'il y ait soit une ℓ_1-clique rouge, soit une ℓ_2-clique bleue. On n'a toujours pas prouvé qu'un tel nombre existait, convenons donc que dans l'éventuel cas où il n'existerait pas, on pose $R(\ell_1, \ell_2) = +\infty$. La démonstration que l'on vient de donner deux fois se retranscrit presque mot pour mot dans un cas plus général et donne la formule :

$$R(\ell_1, \ell_2) \leqslant R(\ell_1 - 1, \ell_2) + R(\ell_1, \ell_2 - 1)$$

formule valable pour tous entiers ℓ_1 et ℓ_2 strictement supérieurs à 1. En particulier, cette formule prouve que tous les $R(\ell_1, \ell_2)$ sont finis et donne un majorant plus ou moins bon (obtenu par récurrence) du nombre en question. Notez qu'en général ce majorant n'est pas du tout optimal : par exemple, on peut montrer que $R(4, 3) = 9$ et non 10 comme on l'a obtenu précédemment.

1.2 Le théorème de Ramsey fini

Le théorème de Ramsey fini est une généralisation des résultats précédents, version « coloriage ». Jusqu'à présent, on considérait un ensemble fini E (l'ensemble des personnes) et on coloriait soit en rouge, soit en bleu les paires de E (une paire était coloriée en rouge si les deux personnes la constituant se connaissaient, en bleu sinon). La situation plus générale devient peut-être claire : on ne se limite plus à deux couleurs d'une part et d'autre part, on ne colorie plus les paires mais les sous-ensembles de cardinal k pour un entier k fixé.

Si l'on veut faire une analogie qui n'a pas lieu d'être, on pourrait dire qu'à partir de maintenant les personnes ont le choix entre *se connaître* (couleur rouge), *ne pas se connaître* (couleur bleue) ou *se connaître vaguement* (couleur violette par exemple), ou encore *se connaître vaguement mais un peu moins* (couleur violette tendant vers le bleu), ou encore *se connaître par ouï-dire* (couleur violette difficile à distinguer du bleu), *etc.* En outre, il ne faudrait pas dire que deux personnes se connaissent, mais plutôt définir la relation de connaissance pour un groupe de k personnes, k pouvant valoir 3, 8 ou même 72. Effectivement, on peut alors mettre une couleur plus ou moins bleue ou plus ou moins rouge selon que le nombre de connaissances dans ledit groupe soit grand ou petit. En résumé, l'exemple des connaissances n'est plus franchement pertinent lorsque l'on traite le cas général du théorème de Ramsey ; c'est le but principal de cet alinéa.

Soit E un ensemble de cardinal n dont on colorie les parties à k éléments, n et k étant deux entiers fixés à l'avance, probablement avec $k \leqslant n$ pour éviter des canulars. Fixons également un entier r qui représente le nombre de couleurs de la palette $C = \{c_1, \ldots, c_r\}$, c_i étant donc la i-ième couleur. Le coloriage est alors incarné par une application $\chi : [E]^k \to C$ où donc $[E]^k$ désigne l'ensemble des parties à k éléments de E. Fixons pour finir $\ell_1, \ldots, \ell_r$ des entiers supérieurs à k. On note :

$$\chi \longrightarrow (\ell_1, \ldots, \ell_r)$$

s'il existe un indice i et une partie $A_i \subset E$ de cardinal ℓ_i tels que toutes les sous-parties à k éléments incluses dans A_i soient de la couleur c_i.

Si la propriété précédente est vraie pour tous les coloriages χ, les entiers $n, k, r, \ell_1, \ldots, \ell_r$ étant toujours fixés, on note simplement :

$$n \longrightarrow (\ell_1, \ldots, \ell_r)^k$$

Allez savoir pourquoi une notation aussi farfelue ? Si maintenant on ne fixe plus que $k, r, \ell_1, \ldots, \ell_r$, on note $R(k, r, \ell_1, \ldots, \ell_r)$ le plus petit entier n tel que $n \longrightarrow (\ell_1, \ell_1, \ldots, \ell_r)^k$. C'est le *nombre de Ramsey* associé aux entiers $k, r, \ell_1, \ldots, \ell_r$. Notez encore une fois qu'il n'est pas du tout évident qu'un tel entier existe, et c'est en fait l'objet du théorème de Ramsey.

Avant d'énoncer ce théorème, regardons de plus près le cas $k = r = 2$ qui correspond donc au cas des personnes qui se connaissent ou ne se connaissent pas. Il faut se convaincre que la notation $n \longrightarrow (\ell_1, \ell_2)^2$ est parfaitement équivalente à l'énoncé que l'on a déjà donné : « dans tout groupe de n personnes, il y en a ℓ_1 qui se connaissent mutuellement ou ℓ_2 qui, deux à deux, ne se connaissent pas ». En particulier les nombres $R(\ell_1, \ell_2)$ et $R(2, 2, \ell_1, \ell_2)$ ont exactement la même définition et donc sont égaux.

Énonçons enfin le théorème de Ramsey :

Théorème 1 (Ramsey fini)**.** *Avec les notations précédentes, pour tous entiers $r, k, \ell_1, \ldots, \ell_r$ tels que $\ell_i \geqslant k$ pour tout entier i, il existe un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, on ait :*

$$n \longrightarrow (\ell_1, \ldots, \ell_r)^k$$

Comme nous l'avons déjà dit, le plus petit entier n_0 convenable est noté $R(k, r, \ell_1, \ldots, \ell_r)$.

Nous ferons la démonstration par la suite. Notons pour l'instant quelques trivialités qui nous seront peut-être utiles à l'occasion. On a :

1. si $n \longrightarrow (\ell_1, \ldots, \ell_r)^k$ et si $m \geqslant n$, alors $m \longrightarrow (\ell_1, \ldots, \ell_r)^k$
2. si $n \longrightarrow (\ell_1, \ldots, \ell_r)^k$ et si pour tout i, $\ell'_i \leqslant \ell_i$, alors $n \longrightarrow (\ell'_1, \ldots, \ell'_r)^k$
3. pour tous $k, r, \ell_2, \ldots, \ell_r$, on a $R(k, r, k, \ell_2, \ldots, \ell_r) = R(k, r-1, \ell_2, \ldots, \ell_r)$

La propriété 2 est intéressante, elle assure que pour prouver le théorème on peut se restreindre au cas où tous les ℓ_i sont égaux en considérant le plus grand d'entre eux. Prouvons la propriété 3 qui demande une petite argumentation. Il s'agit de montrer les deux résultats suivants :

$$\begin{array}{rcl} R(k, r, k, \ell_2, \ldots, \ell_r) & \longrightarrow & (\ell_2, \ldots, \ell_r)^k \\ R(k, r-1, \ell_2, \ldots, \ell_r) & \longrightarrow & (k, \ell_2, \ldots, \ell_r)^k \end{array}$$

Prouvons le premier. On considère un ensemble de cardinal $R(k, r, k, \ell_2, \ldots, \ell_r)$ et on colorie ses sous-parties de cardinal k en les $r-1$ couleurs $c_2, \ldots, c_r$. Un tel coloriage est *a fortiori* un coloriage en r couleurs et donc par définition de $R(k, r, k, \ell_2, \ldots, \ell_r)$, il existe un indice i et une partie A_i de cardinal ℓ_i (en posant $\ell_1 = k$) dont toutes les sous-parties de cardinal k ont la couleur c_i. Évidemment, i ne peut pas valoir 1 puisque la couleur c_1 n'est pas utilisée mais cela n'a pas d'importance.

Passons au second résultat. Ici on prend un ensemble E de cardinal $R(k, r-1, \ell_2, \ldots, \ell_r)$ et on colorie ses sous-parties de cardinal k en r couleurs $c_1, \ldots, c_r$. Si la couleur c_1 est utilisée, il existe une partie $A_1 \subset E$ de cardinal k de couleur c_1. Mais alors toutes les sous-parties de A_1 de cardinal k sont coloriées de la couleur c_1 puisqu'il n'y a qu'une sous-partie qui est précisément A_1. Sinon la couleur c_1 n'est pas utilisée et on se retrouve avec un coloriage en $r-1$ couleurs. En appliquant la définition de $R(k, r-1, \ell_2, \ldots, \ell_r)$, on obtient directement ce que l'on veut.

Notons que pour $k = 1$, on peut calculer explicitement le nombre de Ramsey $R(1, r, \ell_1, \ldots, \ell_r)$ et il vaut, d'après le principe des tiroirs[1] :

$$(\ell_1 - 1) + \ldots + (\ell_r - 1) + 1 = \ell_1 + \ldots + \ell_r - r + 1$$

1.3 Le théorème de Ramsey infini

Le théorème de Ramsey admet également une version infinie, plus simple à formuler et également à prouver. Nous allons l'énoncer tout de suite, la prouver dans la foulée puis finalement expliquer comment le théorème de Ramsey fini peut se déduire du théorème de Ramsey infini. Cela nous dispensera de donner la preuve élémentaire mais affreusement technique du théorème de Ramsey fini.

Théorème 2 (Ramsey infini)**.** *Soient k et r deux entiers strictement positifs. Soit E un ensemble infini. Soit $\chi : [E]^k \to \{c_1, \ldots, c_r\}$ un coloriage des sous-parties de E de cardinal k. Alors il existe une partie $A \subset E$ infinie dont toutes les sous-parties de cardinal k sont de la même couleur.*

Sans plus attendre, faisons la démonstration. On commence par fixer r le nombre de couleurs. On procède ensuite par récurrence sur l'entier k. Pour $k = 1$, c'est totalement évident : si l'on colorie un ensemble infini avec un nombre fini de couleurs, forcément il y a un nombre infini d'éléments qui ont la même couleur.

Supposons le théorème acquis pour des parties de cardinal $k - 1$ et démontrons-le pour des parties de cardinal k. On considère un ensemble E infini dont on colorie les sous-parties de cardinal k. Pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence, il nous faut construire un nouvel ensemble E' disons dont on sera en mesure de colorier les parties de cardinal $k - 1$.

L'ensemble E' sera un sous-ensemble de E, dénombrable qui plus est. Plus exactement on cherche à construire E' sous la forme :

$$E' = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

où tous les x_i sont des éléments de E deux à deux distincts et où la couleur de la partie $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ avec $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ ne dépend que de $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}$ et donc pas de x_{i_k}. Si l'on arrive à cela, on pourra colorier les parties de E' de cardinal $k - 1$: pour donner une couleur à la partie $\left\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}\right\}$, on choisit un ultime indice i_k supérieur à tous les i_j et on regarde la couleur de la partie $\left\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, x_{i_k}\right\}$, couleur qui justement d'après la propriété précédente ne dépend pas du choix de l'indice i_k. D'après l'hypothèse de récurrence, il va exister un sous-ensemble infini A' de E' tel que toutes les sous-parties de A' de cardinal $k - 1$ soient de la même couleur c.

La partie A' est une partie de E et si X désigne une sous-partie de A' de cardinal k, disons $X = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$ avec $i_1 < \ldots < i_k$, alors X aura par construction la même couleur que la partie $\left\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}\right\}$, c'est-à-dire c. Ainsi la partie A' vérifiera les conditions du théorème. Il ne reste plus qu'à construire cette fameuse partie E'.

Pour cela, on procède par récurrence, à nouveau. Pour $i \leqslant k - 1$, on choisit les x_i arbitrairement. Passons à x_k. Si x n'est pas l'un des x_i $(1 \leqslant i \leqslant k - 1)$, on regarde la couleur de l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_{k-1}, x\}$. Lorsque x parcourt $E \backslash \{x_1, ..., x_{k-1}\}$ les couleurs

[1]Le principe des tiroirs dit que si l'on range $kn + 1$ chaussettes dans n tiroirs, il y a forcément un tiroir qui contient $k + 1$ chaussettes.

prises décrivent un ensemble fini et donc il existe un sous-ensemble encore infini, disons S_k, inclus dans $E\setminus\{x_1,\ldots,x_{k-1}\}$ tel que la couleur de la partie $\{x_1,\ldots,x_{k-1},x\}$ soit constante lorsque x parcourt S_k. C'est donc dans ce sous-ensemble S_k que l'on va devoir choisir tous les x_n pour $n \geqslant k$. Prenons $x_k \in S_k$ quelconque.

Traitons x_{k+1}. Comme on vient de le dire, il faut le choisir dans S_k. Par ailleurs, on peut refaire le raisonnement précédent. Pour un x qui n'est pas l'un des x_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, regardons simultanément les couleurs des parties $\left\{x_{i_1},\ldots,x_{i_{k-1}},x\right\}$ où les indices vérifient $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \leqslant k$. On obtient ainsi une couleur pour chaque choix d'indices et donc un uplet de couleurs (en l'occurrence, ici, c'est un k-uplet). L'ensemble des k-uplets de couleurs est fini et donc il va exister un ensemble infini S_{k+1} tel que tout $x \in S_{k+1}$ fournisse le même k-uplet de couleurs. C'est dans ce sous-ensemble que vont être choisis tous les x_n pour $n \geqslant k+1$. On choisit $x_{k+1} \in S_{k+1}$ encore arbitrairement... et on continue ainsi.

On construit par le fait une suite S_n de sous-ensembles infinis de E décroissante pour l'inclusion et une suite d'éléments (x_n) vérifiant les propriétés suivantes :

1. les x_n sont deux à deux distincts ; plus précisément, $x_n \in S_n$ mais $x_n \notin S_{n+1}$
2. si on se donne des indices $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \leqslant n-1$, la couleur de $\left\{x_{i_1},\ldots,x_{i_{k-1}},x\right\}$ ne dépend pas de x pris dans S_n

Ceci implique bien la propriété recherchée : soient une suite d'indices $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1}$ et $n = i_{k-1}+1$, alors pout tout $i_k > i_{k-1}$, on a $i_k \geqslant n$ d'où $i_k \in S_n$, et la couleur de $\{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\}$ ne dépend pas de i_k.

Pour ceux qui seraient obnubilés par l'axiome du choix[2], voyons comment il intervient dans cette situation. Dans un premier temps, il est manifeste que la démonstration écrite comme elle l'est utilise l'axiome du choix dans toute sa forme. Cependant, il faut noter deux choses. *Primo*, en l'absence de l'axiome du choix, la notion d'*infini* est très floue ; il existe plusieurs définitions non équivalentes mais ce n'est pas le propos de les donner et les détailler ici.

Secundo, si l'on suppose simplement qu'il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans E (ce qui est équivalent à la notion de Dedekind-infini), alors il est possible de rédiger la démonstration précédente de façon à ce qu'elle n'utilise pas l'axiome du choix : il suffit de transporter le bon ordre usuel sur $\mathbb{N}$ sur la partie de E qui lui est équipotente et de choisir systématiquement les plus petits éléments convenables de cette partie. Par contre, sans l'axiome du choix il est possible de construire un ensemble E infini, dans l'acceptation « non équipotent à un ordinal fini », tel qu'il n'existe aucune injection de $\mathbb{N}$ dans E. Et on peut même s'arranger pour trouver un tel ensemble pour lequel le théorème de Ramsey infini est mis en défaut.

1.4 La compacité : un moyen de lier le fini et l'infini

Le théorème de compacité a une formulation très générale et très puissante en logique : il dit que si un ensemble d'axiomes est finiment satisfaisable alors il est satisfaisable. Cependant on n'est pas beaucoup plus avancé si l'on ne connaît pas la définition de tous ces termes. Essayons d'expliquer en passant sur les détails. Vous pouvez trouver en annexe une version plus complète mais plus difficile à lire de ces explications.

On se donne un ensemble d'axiomes quelconques, disons A. On ne précise pas ici ce que l'on entend précisément par le mot *axiome*, il s'agit juste de donner une idée. Le théorème

[2] Quoi ? Comme moi ? Mais non, pas du tout...

de compacité dit alors que si aucun sous-ensemble fini de ces axiomes n'est contradictoire, alors l'ensemble de tous les axiomes ne l'est pas non plus. En contraposant, on obtient la version qui va nous être utile ici : « Si l'ensemble d'axiomes A est contradictoire, alors il y avait déjà un sous-ensemble fini de A permettant d'aboutir à une contradiction ».

Sous un certain éclairage, ce théorème peut paraître très naturel. Quelle pourrait être la signification de « l'ensemble d'axiomes A est contradictoire » ? Sans doute qu'en combinant judicieusement ces axiomes, on arrive à une démonstration d'une absurdité[3], typiquement $1 = 0$. Mais une démonstration est par nature finie et donc ne peut utiliser qu'un nombre fini d'axiomes... ce nombre fini d'axiomes permet donc à lui tout seul d'aboutir déjà à une contradiction

Il faut quand même faire attention : malgré les apparences, le théorème que l'on vient d'énoncer est tout à fait précis dans sa formulation exacte, formulation qui rappelons-le est reportée en annexe. En particulier, il peut renfermer d'énormes pièges si l'on ne sait pas exactement ce que l'on fait.

Voyons plutôt comment on peut l'utiliser ici. On fixe k et ℓ deux entiers, avec $\ell \geqslant k$ et on veut prouver le théorème de Ramsey fini lorsque tous les ℓ_i valent ℓ. Si E est une partie finie de $\mathbb{N}$, on considère l'axiome $\mathcal{A}_E$ suivant :

> *Pour tout coloriage des parties à k éléments de $\mathbb{N}$, toute partie A de E de cardinal ℓ est telle qu'au moins deux sous-ensembles de A de cardinal k soient coloriés de couleur différente.*

Appliquons avec les axiomes $\mathcal{A}_E$ le théorème de compacité. L'ensemble de tous ces axiomes est en contradiction manifeste avec le théorème de Ramsey infini, donc il existe un ensemble fini de parties de $\mathbb{N}$, disons $E_1, \ldots, E_n$, telles que l'ensemble des axiomes $\{\mathcal{A}_{E_1}, \ldots, \mathcal{A}_{E_n}\}$ soit déjà contradictoire. Si l'on prend $E = \cup_{i=1}^n E_i$, on voit que l'axiome $\mathcal{A}_E$ implique simultanément tous les $\mathcal{A}_{E_i}$ et donc qu'il est contradictoire à lui tout seul. Un tel E fournit par définition un exemple pour le théorème de Ramsey fini. En conclusion, le théorème de Ramsey infini implique la version finie.

Notez qu'il peut paraître étrange, à la lecture de la démonstration précédente, que l'on se restreigne aux ensembles E *finis* pour définir l'axiome $\mathcal{A}_E$. Le problème n'est pas que l'on n'obtient plus la conclusion désirée si l'on autorise également les ensembles infinis mais que sans cette restriction, les hypothèses du théorème de compacité ne sont plus vérifiées. C'est donc bien important.

1.5 Reformulation en termes d'hypergraphes

Un *hypergraphe*[4] H est la donnée d'un ensemble $V(H)$ dont les éléments s'appellent les *sommets* et de $E(H)$, un ensemble de parties de H dont les éléments s'appellent les *hyperarêtes*. Une hyperarête, c'est donc simplement un ensemble de sommets. Cet ensemble peut être fini ou infini, peu importe. Dans le cas où il est de cardinal 2, on retrouve la notion d'arête. Dans le cas où toutes les hyperarêtes sont de cardinal 2, l'hypergraphe est simplement un graphe[5].

[3] Avec des bonnes définitions, cette caractérisation est exacte et s'appelle le théorème de complétude.

[4] Comme l'a (presque) dit Pierre : « Un graphe, c'est simple ! Un hypergraphe, c'est hyper simple ! ».

[5] Si vous n'avez jamais entendu parler de graphe avant, oubliez cette remarque... ou prenez cela comme définition.

On s'intéresse aux coloriages d'hypergraphes. Colorier un hypergraphe, cela consistera simplement pour nous à colorier les sommets. Comme pour les graphes, on peut définir le nombre chromatique d'un hypergraphe : si H est un hypergraphe, le *nombre chromatique* de H est le plus petit nombre de couleurs pour lequel il existe un coloriage de H tel qu'il n'y ait aucune hyperarête monochromatique. On note ce nombre $\chi(H)$. Une fois de plus, ce nombre n'a aucune raison d'exister, il se pourrait que quelque soit le nombre de couleurs que l'on prenne, on n'arrive jamais à la condition de non-monochromie. Dans ce cas, on note simplement $\chi(H) = +\infty$.

De plus, si H est un hypergraphe et si W est un sous-ensemble de $V(H)$, on définit la *restriction* de H à W que l'on note $H_{|W}$. Les sommets de ce nouvel hypergraphe sont les éléments de W et les hyperarêtes sont les hyperarêtes de H totalement incluses dans W. Nous pouvons maintenant reénoncer le principe de compacité avec le point de vue des hypergraphes.

Théorème 3. *Soit r un entier. Soit H un hypergraphe dont toutes les hyperarêtes sont finies. Si pour toute partie finie $W \subset V(H)$, on a $\chi\left(H_{|W}\right) \leqslant r$, alors $\chi(H) \leqslant r$.*

Ce dernier théorème se déduit encore une fois du théorème de compacité. Prouvons-le par exemple dans le cas où les sommets de H forment un ensemble dénombrable. On peut alors supposer que $V(H) = \mathbb{N}$. Si W est une partie finie de $\mathbb{N}$, on introduit l'axiome $\mathcal{A}_W$:

> *Pour tout hypergraphe dont les sommets sont l'ensemble $\mathbb{N}$ et dont les hyperarêtes sont finies, et pour tout coloriage en r couleurs des sommets de cet hypergraphe, aucune hyperarête incluse dans W n'est monochromatique.*

Comme précédemment, le théorème de compacité permet de conclure. On voit également que l'hypothèse de dénombrabilité faite n'est pas du tout contraignante : si on veut démontrer le théorème pour un hypergraphe dont l'ensemble des sommets est un ensemble A quelconque, on remplace partout dans la preuve précédente $\mathbb{N}$ par A et cela fonctionne de la même façon. L'important est simplement de fixer l'ensemble de sommets avant de commencer à appliquer le théorème de compacité.

Nous allons maintenant donner une démonstration alternative au théorème 3 qui ne fonctionne par contre que dans le cas dénombrable. On suppose donc $V(H) = \mathbb{N}^\star$. La démonstration est fort simple et fort naturelle. Posons $H_n = H_{|\{1,\dots,n\}}$. Sur tous les graphes H_n, on dispose d'un coloriage χ_n en r couleurs tel qu'aucune hyperarête ne soit monochromatique, et on veut construire un coloriage χ sur $\mathbb{N}^\star$ ayant la même propriété.

On construit χ par récurrence. Lorsque n parcourt $\mathbb{N}^\star$, la quantité $\chi_n(1)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Il existe donc un ensemble infini d'indices S_1 tel que $\chi_n(1)$ soit constant pour n variant dans S_1. On définit alors $\chi(1)$ comme étant cette couleur commune. Alors, lorsque n parcourt S_1, l'ensemble des $\chi_n(2)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Il existe donc un ensemble infini d'indices S_2 tel que $\chi_n(2)$ soit constant pour n variant dans S_2. On définit alors $\chi(2)$ comme étant cette couleur commune. Et ainsi de suite... on construit ainsi un coloriage χ qui convient : comme toute hyperarête E est finie, elle est déjà dans un certain H_n et donc pour n suffisamment grand, elle a la même couleur selon χ_n et selon χ.

Faisons trois remarques. Premièrement, le cas dénombrable permet à lui seul de prouver une nouvelle fois que le théorème de Ramsey infini implique le théorème de Ramsey fini.

Plus précisément, on fixe k, r et ℓ trois entiers et on considère l'hypergraphe H suivant. Les sommets sont les parties de $\mathbb{N}$ de cardinal k et on associe à toute partie A de $\mathbb{N}$ de cardinal ℓ une hyperarête : c'est l'ensemble des sommets de H inclus dans A. Le théorème de Ramsey infini dit que le nombre chromatique de H est infini, et donc d'après le principe de compacité, il existe une partie finie $W \in V(H)$ telle que le nombre chromatique de $H_{|W}$ est supérieur à r, ce qui implique directement le théorème de Ramsey fini avec tous les ℓ_i égaux à ℓ.

Il faut aussi remarquer, surtout si l'on est fan de l'axiome du choix, que la démonstration que l'on vient de donner n'utilise pas cet axiome. Il faut surtout faire attention lorsque l'on choisit simultanément tous les χ_n, mais comme chacun est pris dans un ensemble fini que l'on connaît bien, on peut s'arranger pour se passer de l'axiome maudit. On obtient comme cela, une véritable démonstration du théorème de Ramsey fini qui n'utilise pas l'axiome du choix... Ceci est extrêmement rassurant étant donné que le théorème de Ramsey fini est comme son nom l'indique tout ce qu'il y a de plus « fini » !

Finalement, la démonstration du théorème 3 que l'on vient de donner s'adapte en fait presque en tout point lorsque l'ensemble des sommets n'est plus dénombrable, mais quelconque. Il s'agit simplement de remplacer la récurrence par ce que l'on appelle une *induction transfinie*, mais aucune idée nouvelle n'apparaît. Cependant, il y a encore quelques restrictions vis-à-vis de l'axiome du choix. En effet, pour pouvoir faire cette induction transfinie, il faut pouvoir mettre un bon ordre sur l'ensemble des sommets. Cela est possible si l'on accepte l'axiome du choix mais pas forcément sinon. Et en effet, sans l'axiome du choix, il peut exister un contre-exemple au théorème 3...

1.6 Que sait-on des nombres de Ramsey ?

Rappelons peut-être que le nombre de Ramsey $R(k, r, \ell_1, \ldots, \ell_r)$ est le plus petit entier n_0 qui vérifie le théorème de Ramsey fini. Si la démonstration par le théorème de compacité est élégante, dans le sens où elle reste très peu technique, elle ne donne par contre aucun renseignement sur le nombre de Ramsey qui apparaît.

Il est en fait possible, en souffrant un peu, d'adapter directement la preuve du théorème de Ramsey infini dans le cas fini. Il faut contrôler à chaque fois le cardinal de l'ensemble que l'on considère, alors que dans le cas infini on pouvait s'en sortir sans douleur en disant justement qu'il était infini.

Cependant les bornes obtenues sont gigantesques et bien que les nombres de Ramsey le soient aussi, on pense que l'on est très loin d'avoir atteint des optima, même en ordre de grandeur. Pour étayer l'immensité de notre ignorance, mentionnons qu'à ce jour, on ne connaît seulement de façon exacte que 10 nombres de Ramsey[6]. Le seul que l'on connaisse pour lequel on ait un des entiers k ou r strictement supérieur à 2 est $R(2, 3, 3, 3, 3) = 17$.

Les bornes les plus utilisables dont on dispose ne s'appliquent encore qu'au cas $k = r = 2$. Dans ce cas, on sait par exemple que :

$$R(2, 2, \ell_1, \ell_2) \leqslant \mathrm{C}_{\ell_1+\ell_2-2}^{\ell_1-1}$$

et cette inégalité résulte en fait de la première inégalité que l'on a donnée dans cet article. Elle permet de montrer l'existence d'une constante c telle que :

$$R(2, 2, \ell, \ell) \leqslant c\sqrt{\ell} \cdot 4^{\ell}$$

[6]Voir en annexe pour plus de détails.

On sait par ailleurs que :

$$R(2,2,\ell,\ell) \geqslant 2^{\frac{\ell-2}{2}}$$

ce qui laisse encore quand même pas mal de marge. Bref, tout cela reste encore très vague.

La démonstration de la minoration est assez jolie. Nous allons la donner. Il s'agit d'une application de la méthode probabiliste introduite par Erdös. Pour prouver que $R(2,2,\ell,\ell)$ est plus grand qu'un entier n, il faut prouver qu'il existe une façon de colorier les paires d'un ensemble à n éléments de sorte que l'on ne puisse pas trouver une sous-partie de cardinal ℓ de cet ensemble dont toutes les paires soient de la même couleur. Si l'on prouve que la probabilité qu'un tel événement arrive est strictement positive, on sera assuré de l'existence d'un exemple comme on le cherche. Voici l'idée d'Erdös.

On prend pour univers l'ensemble de tous les coloriages des paires de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$, coloriages utilisant les deux couleurs c_1 et c_2. On munit cet univers de la probabilité uniforme, c'est-à-dire donnant autant de chance à chaque coloriage d'apparaître.

Considérons maintenant S un sous-ensemble de $\{1,\dots,n\}$ de cardinal ℓ. Considérons l'événement A_S : « les paires d'éléments de S sont toutes coloriées de la même couleur ». Il est alors facile d'estimer la probabilité de l'événement A_S. Précisément, on a :

$$P(A_S) = \frac{2 \times 2^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{\ell(\ell-1)}{2}}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \frac{2}{2^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}}$$

La probabilité que le théorème de Ramsey soit vérifié pour un coloriage de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ est donc majorée par la somme des $P(A_S)$. Il y a C_n^ℓ choix possibles pour S et donc finalement, cette probabilité est majorée par :

$$\mathrm{C}_n^\ell \cdot \frac{2}{2^{\frac{\ell(\ell-1)}{2}}}$$

Si $n < 2^{\frac{\ell-1}{2}}$, ce dernier nombre reste strictement inférieur à 1 (en utilisant $\mathrm{C}_n^\ell \leqslant n^\ell$), et donc l'événement a une probabilité strictement positive, ce qui est bien ce que l'on cherchait à démontrer.

2 La théorème de Ramsey dans la nature

2.1 Historique

Peut-être un peu malgré les apparences, le théorème de Ramsey est vraiment un théorème fondamental de combinatoire. Ce qui permet d'affirmer avec force cette idée, c'est le fait qu'on le retrouve naturellement dans nombre de situations *a priori* totalement différentes. On peut ainsi dire qu'il fournit une cohérence inattendue entre plusieurs domaines. De fait, il permet d'expliquer ou plutôt de réexpliquer et de mieux comprendre certaines démonstrations ou certaines théories en les présentant sous un autre angle mieux éclairé.

Par exemple, il est assez remarquable de voir que le théorème en question a été prouvé indépendamment plusieurs fois par des mathématiciens qui en ont eu besoin au détour de leurs recherches. Ramsey, lui-même, n'a pas énoncé ce résultat par pur plaisir, mais parce qu'il en avait besoin pour résoudre un problème de logique. Effectivement, Ramsey n'était pas « combinatoricien » d'ambition ou de formation : il étudiait plutôt l'économie, la philosophie et la logique.

Pour parler encore quelques lignes de Ramsey, disons qu'il est mort en 1930 à l'âge de 28 ans juste après avoir publié l'article dans lequel il énonce déjà sous sa forme actuelle et prouve le théorème que nous avons présenté. Il connaissait déjà les versions finie et infinie mais, comme on peut peut-être le regretter, il n'avait pas pensé à l'argument de compacité pour relier les deux énoncés.

Le théorème de Erdös-Szekeres que nous présentons juste après est celui qui a popularisé les résultats de Ramsey. Comme nous allons le voir, Szekeres avait redémontré indépendemment les théorèmes pour résoudre un certain problème *a priori* sans rapport avec des coloriages, et s'est aperçu par la suite que quelqu'un avait déjà fait l'effort avant lui.

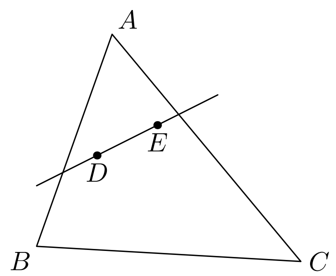
Place maintenant aux énoncés plus précis.

2.2 Le théorème de Erdös-Szekeres

Là encore, on ne peut pas omettre la petite histoire qui va avec. Tout commence donc dans un groupe de travail organisé par de jeunes gens d'à peine vingt ans lorsque Mademoiselle Esther Klein annonce un résultat qu'elle vient de remarquer et de prouver :

Théorème 4 (Esther Klein). *Parmi cinq points du plan, trois jamais alignés, on peut toujours en trouver quatre qui sont les sommets d'un quadrilatère convexe*

Le résultat est élégant et la démonstration très accessible. On raisonne sur l'enveloppe convexe des cinq points : c'est soit un triangle, soit un quadrilatère, soit un pentagone. Dans les deux derniers cas, le résultat est immédiat. Regardons donc le cas du triangle. Les points sont alors répartis comme le montre la figure suivante :



On trace la droite (DE), elle recoupe deux des côtés, puisqu'elle ne peut pas passer par un sommet d'après l'hypothèse de non-alignement faite dans le théorème. Supposons que cette droite coupe les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Alors les points B, D, E et C sont bien les sommets d'un quadrilatère convexe.

Esther demanda alors à l'assemblée si l'on ne pouvait pas généraliser ce résultat : si l'on prend un nombre suffisamment grand de points dans le plan, peut-on toujours en trouver k d'entre eux qui seraient les sommets d'un k-gone convexe ?

Szekeres s'intéressa au problème et revint la semaine suivante avec une solution. La réponse est affirmative. Bien qu'il ne connût pas les théorèmes de Ramsey, la preuve qu'il donna s'appuyait sur un lemme clé qui n'était autre que le théorème de Ramsey fini qu'il démontra donc à l'occasion. Erdös, qui était là aussi, s'intéressa également au problème et fournit d'autres démonstrations, des généralisations et des études plus précises. C'est pour cela que son nom figure dans l'intitulé du théorème qui suit :

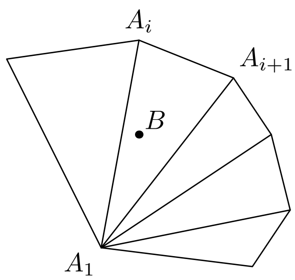
Théorème 5 (Erdös-Szekeres). *Soit $k \geqslant 3$ un entier. Alors il existe un entier n tel que pour toute donnée de n points dans le plan, trois d'entre eux n'étant jamais alignés, on peut sélectionner k points parmi ces n qui sont les sommets d'un polygone convexe.*

Il est assez magique de voir que ce dernier théorème se ramène presque directement, en utilisant les résultats de Ramsey évidemment, à la remarque de Esther Klein. Voyons cela.

On prend $n = R(4, 2, 5, k)$ et un E ensemble de n points du plan, trois d'entre eux n'étant jamais alignés. On colorie les parties de E de cardinal 4. Si A est une telle partie, on la colorie en bleu si les quatre points de A sont les sommets d'un quadrilatère convexe et en rouge sinon.

D'après le théorème de Ramsey fini, il existe soit un ensemble de 5 points dont toutes les parties de cardinal 4 ont été coloriées en rouge, soit une partie de cardinal k dont toutes les sous-parties de cardinal 4 ont été coloriées en bleu. Mais le premier cas est impossible puisqu'il contredit l'affirmation d'Esther Klein, c'est donc le deuxième qui se produit.

On a finalement bien trouvé un ensemble de k points et il est tel que tout quadrilatère formé par quatre points de cet ensemble est convexe. Cela suffit à prouver que les k points sont les sommets d'un polygone convexe. On raisonne par l'absurde en supposant que l'enveloppe convexe des k points n'est pas un k-gone. On est donc dans la situation représentée par le dessin suivant :



Le point B qui ne fait pas partie de l'enveloppe convexe est à l'intérieur d'un triangle $A_1A_iA_{i+1}$. Il est même strictement à l'intérieur de ce triangle d'après l'hypothèse de non-alignement. On voit alors avec les yeux que les quatre points A_1, A_i, A_{i+1} et B ne sont pas les sommets d'un quadrilatère convexe. Ceci contredit l'hypothèse et achève la démonstration du théorème.

Pour terminer la petite histoire, signalons que finalement Szekeres a épousé Esther Klein. Erdös évoquait ce problème en terme de « *happy ending problem* ».

2.3 Le théorème de Schur

Voici un second énoncé qui peut être vu comme une application des théorèmes de Ramsey. Cela dit, historiquement, ce n'est pas du tout ainsi qu'il a été démontré puisqu'il est en fait antérieur à la théorie de Ramsey. L'énoncé est le suivant :

Théorème 6 (Schur). *Soit r un entier strictement positif. Il existe un entier N tel que pour tout coloriage de $\{1, \dots, N\}$ en r couleurs, il existe trois entiers a, b et c (pas forcément distincts) de la même couleur et tels que $a + b = c$.*

Nous allons donner une preuve qui utilise le théorème de Ramsey. On commence par poser $N = R(2, r, 3, \ldots, 3) - 1$. Soit χ un coloriage de $\{1, \ldots, N\}$ en r couleurs. On définit un coloriage $\chi^\star$ sur les parties de cardinal 2 de $\{1, \ldots, N+1\}$ en posant :

$$\chi^\star(\{a, b\}) = \chi(|a - b|)$$

D'après le théorème de Ramsey fini, il existe un sous-ensemble de $\{1, \ldots, N+1\}$ de cardinal 3, disons $\{i, j, k\}$ tel que $\chi^\star(\{i, j\}) = \chi^\star(\{j, k\}) = \chi^\star(\{i, k\})$. Si l'on suppose par exemple $i < j < k$, il vient $\chi(|j - i|) = \chi(|k - j|) = \chi(|k - i|)$. Ainsi en posant $a = j - i$, $b = k - j$ et $c = k - i$, on obtient une solution au théorème de Schur.

Évidemment, si l'entier N convient pour le théorème précédent, tout entier plus grand que N convient également.

Une autre approche permet d'obtenir une borne sans doute bien meilleure pour N qui est $e \cdot r!$ où e est la base des logarithmes népériens et $r!$ la factorielle de r, *i.e.* $1 \times 2 \times \ldots \times r$. On se reportera à l'annexe pour plus d'informations.

Signalons également que ce théorème n'est pas du tout innocent. Il a été démontré par Schur alors qu'il se penchait sur le grand théorème de Fermat. Il permettait d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 7. *Soit m un entier. Alors pour tout nombre premier p suffisamment grand il existe des entiers x, y et z non divisibles par p vérifiant l'équation $x^m + y^m = z^m$ modulo p (c'est-à-dire tels que la différence $x^m + y^m - z^m$ soit un multiple de p).*

La preuve utilise donc le théorème de Schur. On considère un nombre premier p et α un entier et pour tout i, α_i le reste de la division euclidienne de α^i par p. Il est facile de voir que si l'on a pris soin de choisir α premier avec p, le reste de la division euclidienne est toujours un élément de $E = \{1, \ldots, p-1\}$.

Ainsi l'ensemble $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}\}$, est un sous-ensemble de E. Il existe un théorème[7] qui affirme que l'on peut choisir α tel que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}\}$ soit exactement E. Par la suite, on choisit α tel quel.

Le plus gros de la démonstration est fait. On colorie E avec une palette de m couleurs $c_1, \ldots, c_m$ de la façon suivante : on colorie α_1 avec la couleur c_1, α_2 avec la couleur c_2 et ainsi de suite on colorie α_m avec la couleur c_m puis pour α_{m+1} on reprend la couleur c_1 et on recommence.

D'après le théorème de Schur, si l'on choisit p suffisamment grand, on peut trouver α_i, α_j et α_k coloriés de la même couleur, tels que $\alpha_i = \alpha_j + \alpha_k$. Mais on sait que

$$\alpha^i = q_i p + \alpha_i \quad ; \quad \alpha^j = q_j p + \alpha_j \quad ; \quad \alpha^k = q_k p + \alpha_k$$

d'une part et d'autre part que :

$$i = q'_i m + r \quad ; \quad j = q'_j m + r \quad ; \quad k = q'_k m + r$$

où cette fois-ci le reste est toujours le même, précisément le numéro de la couleur. En combinant tout cela, on démontre que le nombre suivant :

$$\alpha^r \left[\left(\alpha^{q'_i}\right)^m + \left(\alpha^{q'_j}\right)^m - \left(\alpha^{q'_k}\right)^m \right]$$

est un multiple de p. Comme on a pris soin de choisir α premier à p, le facteur entre crochets est encore un multiple de p et on répond au problème en posant $x = \alpha^{q'_i}$, $y = \alpha^{q'_j}$ et $z = \alpha^{q'_k}$.

[7] Ce théorème est par exemple énoncé de façon légèrement différente et plus générale et prouvé dans l'exposé « Choisissez votre corps ! ». Il s'agit du théorème 1 mentionné dans la partie 2.4.

3 Coloriages de l'espace

3.1 Les théorèmes de Van der Waerden et de Gallai

Le théorème de Schur reprend en quelque sorte le résultat de Ramsey pour $k = 1$ mais en imposant des contraintes supplémentaires, en l'occurrence d'ordre arithmétique, sur l'ensemble monochromatique. Ne pourrait-on pas avoir des résultats analogues avec d'autres conditions ? Par exemple, si on colorie l'ensemble des entiers strictement positifs avec r couleurs, il est évidemment possible de trouver une partie monochromatique formée de multiples d'un certain entier d fixé à l'avance.

Par contre, il n'est pas possible pour un coloriage général de trouver un entier d tel que la partie $d\mathbb{N}^\star$ formée des multiples de d soit monochromatique. Pour prouver cela, construisons à la main un coloriage χ sur $\mathbb{Z}$ ne vérifiant manifestement pas la condition demandée. Pour $d = 1$, ne pas respecter la condition signifie que le coloriage utilise au moins deux couleurs. Colorions donc pour commencer 1 en rouge et 2 en bleu. Pour $d = 2$, il faut imposer que l'ensemble des nombres pairs ne soit pas monochromatique : on colorie pour cela 4 en rouge. Pour $d = 3$, on veut que l'ensemble des multiples de 3 ne soit pas monochromatique : on choisit donc deux multiples de 3 non encore coloriés (qui évidemment existent) et on affecte au premier la couleur rouge et au second la couleur bleue. On poursuit avec les multiples de 4, puis de 5 exactement de la même façon. Ce n'est pas clair que l'on colorie ainsi au final tous les entiers mais cela n'est pas important : s'il reste des entiers non coloriés à la fin de notre infinité d'opérations, on les colorie arbitrairement en rouge. Finalement, on a construit une coloration finie (en l'occurrence en 2 couleurs) de $\mathbb{N}^\star$ pour laquelle aucune des parties $d\mathbb{N}^\star$ n'est monochromatique.

Les idées précédentes se généralisent directement à de nombreuses autres situations, précisément celles pour lesquelles on souhaite un nombre *dénombrable* de parties *infinies* (non) monochromatiques. Ainsi, il existe un coloriage de $\mathbb{N}^\star$ en un nombre fini de couleurs (en l'occurrence toujours 2) pour lequel aucune suite arithmétique infinie n'est monochromatique. On peut multiplier les exemples et, au lieu des suites arithmétiques, considérer les parties de $\mathbb{N}^\star$ images de $\mathbb{N}$ par une certaine fonction polynôme, ou encore remplacer « polynôme » par « fonction calculable par ordinateur ».

À présent, on ne cherche plus une partie infinie monochromatique mais on se restreint à des parties finies. Une question naturelle à poser est : étant donné un coloriage de $\mathbb{N}^\star$ en un nombre fini de couleurs, existe-t-il une suite arithmétique monochromatique finie mais de longueur arbitraire ? La réponse est, ici, positive, c'est le théorème de van der Waerden :

Théorème 8 (van der Waerden)**.** *Soient t et r deux entiers strictement positifs. Étant donné un coloriage de $\mathbb{N}^\star$ en r couleurs, il existe une suite arithmétique monochromatique de longueur t.*

Il existe en outre une version finie du théorème précédent dans laquelle on ne colorie que les premiers entiers. Précisément on a :

Théorème 9 (van der Waerden)**.** *Soient t et r deux entiers strictement positifs. Alors il existe un entier N tel que pour tout coloriage de $\{1, \ldots, N\}$ en r couleurs, on puisse trouver une suite arithmétique monochromatique de longueur t.*

Les deux versions du théorème de van der Waerden sont équivalentes *via* le théorème de compacité. En effet, déjà, le cas fini implique trivialement le cas infini. Pour la réciproque, on considère l'hypergraphe H dont les sommets sont les éléments de $\mathbb{N}^\star$ et les hyperarêtes sont tous les ensembles de k entiers en progression arithmétique. Par le théorème de van den Waerden infini, on déduit que $\chi(H) > r$, et on applique le principe de compacité pour déduire l'existence d'une partie finie $W \subset \mathbb{N}^\star$ tel que $\chi\left(H_{|W}\right) > r$. Il suffit alors de prendre pour N un majorant de W.

Ne démontrons rien pour l'instant et compliquons un brin la situation en passant en dimension supérieure. La généralisation qui vient à l'esprit est un théorème de Gallai que nous énonçons tout de suite :

Théorème 10 (Gallai). *Soient d, r, k et t quatre entiers. Alors, pour tout coloriage de $(\mathbb{N}^\star)^d$ en r couleurs, il existe des entiers $a_1, \ldots, a_d$ pour lesquels les t^d points de la forme $(a_1 + ki_1, \ldots, a_d + ki_d)$ où $0 \leqslant i_1, \ldots, i_d < t$ sont tous de la même couleur.*

Notez que le théorème de van der Waerden (infini) est une reformulation du théorème de Gallai dans le cas $d = 1$. Pour rester fidèle à la tradition instaurée au théorème précédent, gardons-nous de donner quelconque démonstration et continuons notre chemin.

3.2 Interprétation géométrique

Le théorème de Gallai (et donc aussi le théorème de van der Waerden infini) peut s'interpréter remarquablement de façon géométrique. En effet, il dit que si χ est un coloriage fini de $(\mathbb{N}^\star)^d$, il existe une partie homothétique à l'ensemble $\{0, \ldots, t-1\}^d$ monochromatique pour χ.

Pécisons tout de suite ce que l'on entend par « homothétique ». Une *homothétie* de $(\mathbb{N}^\star)$ est une application de la forme :

$$(x_1, \ldots, x_d) \mapsto (kx_1 + a_1, \ldots, kx_d + a_d)$$

le *rapport* de l'homothétie étant par définition l'entier k. Deux sous-ensembles de $(\mathbb{N}^\star)^d$ sont dits *homothétiques* s'il existe une homothétie envoyant l'un sur l'autre.

Or les homothéties vivent de façon plus naturelle sur tout l'espace $\mathbb{R}^d$, que l'on peut voir de façon plus géométrique : c'est l'ensemble des points (repérés par leurs d coordonnées) d'un espace de dimension d. Une *homothétie* de $\mathbb{R}^d$ est une application de la forme :

$$(x_1, \ldots, x_d) \mapsto (kx_1 + a_1, \ldots, kx_d + a_d)$$

où k est un réel non nul cette fois.

On remarque que dans le cas $k = 1$, on retrouve plutôt ce que l'on aimerait appeler (et en l'occurrence qu'on appelle) une translation. Peu importe, on conviendra par la suite, même si ce n'est pas le cas usuellement, que les translations sont des homothéties particulières.

Pour se rassurer, remarquons que toute homothétie qui n'est pas une translation admet un centre. C'est son unique point fixe. Si l'homothétie est donnée par la formule précédente, le centre est le point $\left(\frac{a_1}{1-k}, \ldots, \frac{a_d}{1-k}\right)$.

Finalement, si A et B sont des parties de $\mathbb{R}^d$, on dit que A et B sont *homothétiques* s'il existe une homothétie h telle que $h(A) = B$.

Finalement, on dispose d'un analogue du théorème de Gallai dans cette nouvelle situation, dite continue[8] :

[8] Par opposition à discrète.

Théorème 11 (Gallai)**.** *Soient d et r deux entiers et soit E une partie finie de $\mathbb{R}^d$. Pour tout coloriage de $\mathbb{R}^d$ en r couleurs, il existe une partie homothétique à E et monochromatique.*

Dans la version discrète du théorème de Gallai, la partie finie E était choisie égale à $\{0, \ldots, t-1\}^d$. Cela n'est cependant pas plus restrictif car dans le cas discret, toute partie finie est incluse dans un ensemble de la forme précédente.

Remarquons que les configurations possibles dans le cas continu offrent plus de liberté que dans le cas discret. Par exemple, on prouve classiquement, que les seuls polygones réguliers dont les sommets sont à coordonnées entières sont les carrés dans le cas du plan et en plus les triangles équilatéraux et les hexagones réguliers dans le cas des dimensions supérieures.

On pourrait se demander finalement pourquoi l'on s'intéresse aux parties homothétiques et pas par exemple aux parties isométriques. La réponse est tout simplement que le théorème devient faux avec cette restriction supplémentaire. Par exemple si l'on découpe le plan en bandes parallèles de largeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et que l'on colorie alternativement ces bandes en rouge et en bleu, on constate facilement que l'on ne peut pas trouver trois points de même couleur qui sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté 1. On est donc bien obligé de considérer une famille de transformations plus large.

Bien évidemment, une fois de plus, nous n'allons pas donner dans l'immédiat une preuve du résultat de Gallai. En réalité, aussi bien les deux théorèmes de Gallai que ceux de van der Waerden se déduisent d'un résultat combinatoire très général, en l'occurrence le théorème de Hales-Jewett.

3.3 Le théorème de Hales-Jewett

Avant même de pouvoir énoncer ce théorème, il nous faut donner plusieurs définitions. On commence par considérer un *alphabet*. Ce n'est rien d'autre qu'un ensemble fini et ordonné dont les éléments s'appellent des *lettres*. Par exemple, l'ensemble :

$$\mathcal{A} = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \mathtt{D}, \mathtt{E}, \mathtt{F}, \mathtt{G}, \mathtt{H}, \mathtt{I}, \mathtt{J}, \mathtt{K}, \mathtt{L}, \mathtt{M}, \mathtt{N}, \mathtt{O}, \mathtt{P}, \mathtt{Q}, \mathtt{R}, \mathtt{S}, \mathtt{T}, \mathtt{U}, \mathtt{V}, \mathtt{W}, \mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{Z}\}$$

est un alphabet que tout le monde reconnaît.

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet. Notons t son cardinal. Le produit cartésien $\mathcal{A}^n$ est simplement les suites de n lettres de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire les mots de n lettres écrits dans l'alphabet $\mathcal{A}$. Évidemment, le fait que ces mots aient ou non un sens en français ou en n'importe quelle autre langue n'a aucune importance ici.

À partir de maintenant, pour nos exemples, on considérera l'alphabet formé des simples voyelles, histoire que la suite ne fasse pas vingt pages inutilement. On prendra donc, pour ceux qui ont oublié leurs leçons du primaire :

$$\mathcal{A} = \{\mathtt{A}, \mathtt{E}, \mathtt{I}, \mathtt{O}, \mathtt{U}, \mathtt{Y}\}$$

Si t désigne toujours le nombre de lettres de l'alphabet, une *droite* est par définition un ensemble de t mots de n lettres ayant la propriété suivante : pour tout i, la i-ième lettre de chaque mot, soit est toujours la même, soit décrit *dans l'ordre* toutes les lettres de l'alphabet, ce dernier cas devant se produire au moins une fois.

Par exemple, une droite pour l'alphabet $\mathcal{A}$ est $(\mathtt{OAI}, \mathtt{OEI}, \mathtt{OII}, \mathtt{OOI}, \mathtt{OUI}, \mathtt{OYI})$. En effet, si l'on écrit les mots l'un en dessous de l'autre :

```
O  A  I
O  E  I
O  I  I
O  O  I
O  U  I
O  Y  I
```

on constate que la première et la troisième colonnes sont constantes et dans la deuxième colonne on trouve toutes les voyelles dans l'ordre.

Le théorème de Hales-Jewett dit alors la chose suivante :

Théorème 12 (Hales-Jewett)**.** *Soient r et t deux entiers. Soit $\mathcal{A}$ un alphabet de cardinal t. Alors, pour n suffisamment grand et pour tout coloriage de $\mathcal{A}^n$ en r couleurs, il existe une droite monochromatique.*

Voyons à présent pourquoi ce théorème implique les résultats de coloriage énoncés dans les théorèmes 9, 10 et 11. Dans ce dernier théorème, pour données, on dispose d'un ensemble fini E inclus dans $\mathbb{R}^d$ et d'un coloriage fini χ de $\mathbb{R}^d$. Notons par exemple $A_1, \dots, A_t$ les points de E. Notons également v_i le vecteur $\overrightarrow{OA_i}$; c'est le vecteur qui a les mêmes coordonnées que le point A_i.

Considérons l'alphabet $\mathcal{A} = \{\overrightarrow{v}_1, \dots, \overrightarrow{v}_t\}$ ordonné de cette façon. Fixons n un entier et $k_1, \dots, k_n$ des réels que l'on choisira judicieusement par la suite. À tout mot $\mathtt{m}$ de n lettres écrit dans l'alphabet $\mathcal{A}$, disons $\mathtt{m} = \mathtt{a}_1 \dots \mathtt{a}_n$ où chacun des $\mathtt{a}_j$ est l'un des $\overrightarrow{v}_i$, on peut associer un vecteur de l'espace en posant :

$$f(\mathtt{m}) = \sum_{j=1}^{n} k_j \mathtt{a}_j$$

et on aimerait choisir les k_j de sorte que cette association soit injective, c'est-à-dire qu'à deux mots $\mathtt{m}$ et $\mathtt{m}$' différents soient associés deux vecteurs différents. Pour cela, il faut que pour toutes suites d'indices $(i_1, \dots, i_n)$ et $(i'_1, \dots, i'_n)$, on ait :

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \left(\overrightarrow{v}_{i_j} - \overrightarrow{v}_{i'_j}\right) \neq 0$$

Les k_j doivent donc éviter un certain nombre fini d'égalités. Si l'on connaît un peu d'algèbre linéaire, la question revient à trouver un point de l'espace qui n'appartient pas à la réunion d'un nombre fini d'hyperplans et cela est toujours possible. Si l'on n'est pas ému par cet argument, on pourra simplement admettre que de tels k_j existent, ce n'est pas franchement l'objet de ce papier de détailler ce point.

On peut alors *via* f, transporter le coloriage χ de $\mathbb{R}^d$ sur $\mathcal{A}^n$. Précisement si $\mathtt{m}$ est un mot de $\mathcal{A}^n$, on pose :

$$\chi^\star(\mathtt{m}) = \chi(f(\mathtt{m}))$$

Le point important est de remarquer que si $(\mathtt{m}_1, \dots, \mathtt{m}_t)$ est une droite de $\mathcal{A}^n$, alors l'ensemble $\{f(\mathtt{m}_1), \dots, f(\mathtt{m}_t)\}$ (où le vecteur $\overrightarrow{OM}$ correspond au point M) est homothétique à E et monochromatique si la droite l'est. En effet, si l'on note $\mathtt{a}_{i,j}$ la j-ième lettre du mot $\mathtt{m}_i$, la définition d'une droite assure l'existence d'un sous-ensemble $J \subset \{1, \dots, n\}$ non vide tel que si $j \in J$ alors $\mathtt{a}_{i,j} = v_i$ et si $j \notin J$, alors la fonction $i \mapsto \mathtt{a}_{i,j}$ est constante, disons égale à $\overrightarrow{c}_j$. On peut alors calculer :

$$f(\mathtt{m}_i) = \sum_{j=1}^{n} k_j \mathtt{a}_{i,j} = \sum_{j \in J} k_j \mathtt{a}_{i,j} + \sum_{j \notin J} k_j \mathtt{a}_{i,j} = \sum_{j \in J} k_j \overrightarrow{v}_i + \sum_{j \notin J} k_j \overrightarrow{c}_j = k\overrightarrow{v}_i + \overrightarrow{c}$$

où le réel k et le vecteur $\overrightarrow{c}$ ne dépendent pas de i. Les mots $\mathtt{m}_i$ sont distincts deux à deux d'après la définition d'une droite, leurs images le sont donc aussi puisque f est injective, ce qui implique $k \neq 0$.

En remettant tout bout à bout, on s'aperçoit que l'on a bien prouvé que le théorème 11 résulte du théorème de Hales-Jewett. Les théorèmes 9 et 10 en résultent également, il suffit de reprendre la démonstration précédente en justifiant en outre que l'on peut sans problème choisir tous les k_j entiers.

3.4 Preuve du théorème de Hales-Jewett

La preuve du théorème de Hales-Jewett que nous allons donner ici est due à Shelah. Elle se fait par récurrence sur t le nombre de lettres de l'alphabet. S'il n'y a qu'une lettre, les droites ne contiennent qu'un mot et donc le théorème est évident ; ne nous attardons donc pas davantage sur l'initialisation et passons à l'hérédité.

Supposons que l'on sache démontrer le théorème pour un alphabet de $t-1$ lettres et considérons à présent un alphabet de t lettres. Pour simplifier un peu la démonstration supposons sans vergogne que $t = 6$ et que notre alphabet est toujours $\mathcal{A} = \{\mathtt{A}, \mathtt{E}, \mathtt{I}, \mathtt{O}, \mathtt{U}, \mathtt{Y}\}$. Par hypothèse on sait alors que le théorème est vrai pour l'alphabet réduit $\mathcal{A}' = \{\mathtt{A}, \mathtt{E}, \mathtt{I}, \mathtt{O}, \mathtt{U}\}$[9].

Fixons un entier r le nombre de couleurs et une palette $\{c_1, \dots, c_r\}$. Par hypothèse, il existe un entier s qui est tel que tout coloriage[10] de $\mathcal{A}'^s$ admette une droite monochromatique, et on veut prouver qu'il existe un autre entier n tel que tout coloriage de $\mathcal{A}^n$ admette une droite monochromatique. Bien sûr, il n'y a aucune chance que $n = s$ convienne mais examinons quand même ce que l'on obtient en faisant ce choix. Fixons un coloriage χ sur $\mathcal{A}^s$.

Comme $\mathcal{A}'^s \subset \mathcal{A}^s$, on obtient en particulier un coloriage de $\mathcal{A}'^s$ et donc par hypothèse on peut trouver une droite écourtée de la forme :

$$\begin{array}{lcccc|c|cc}
\mathtt{m}_1 & = & \square & \square & \dots & \square & \dots & \square \\
\mathtt{m}_2 & = & \square & \square & \dots & \square & \dots & \square \\
\mathtt{m}_3 & = & \square & \square & \dots & \square & \dots & \square \\
\mathtt{m}_4 & = & \square & \square & \dots & \square & \dots & \square \\
\mathtt{m}_5 & = & \square & \square & \dots & \square & \dots & \square
\end{array}$$

où chaque carré représente une lettre et où il y a s carrés par ligne. De plus, comme l'on a affaire à une droite, chaque colonne est forcément l'une des six suivantes :

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathtt{A}\\\mathtt{A}\\\mathtt{A}\\\mathtt{A}\\\mathtt{A}\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathtt{E}\\\mathtt{E}\\\mathtt{E}\\\mathtt{E}\\\mathtt{E}\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathtt{I}\\\mathtt{I}\\\mathtt{I}\\\mathtt{I}\\\mathtt{I}\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathtt{O}\\\mathtt{O}\\\mathtt{O}\\\mathtt{O}\\\mathtt{O}\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathtt{U}\\\mathtt{U}\\\mathtt{U}\\\mathtt{U}\\\mathtt{U}\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\mathtt{A}\\\mathtt{E}\\\mathtt{I}\\\mathtt{O}\\\mathtt{U}\end{array}}$$

[9]Comme certaines personnes considèrent encore que Y n'est pas une voyelle, cette situation n'est pas du tout aberrante :-)

[10]Par la suite, sauf mention explicite du contraire qui ne tardera pas à venir, la palette que l'on considèrera pour les coloriages sera celle que l'on vient de fixer.

la dernière possibilité apparaissant au moins une fois. L'idée naturelle est alors de compléter cette droite en remplaçant respectivement chacune des colonnes précédentes par :

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathtt{A}\\\mathtt{A}\\\mathtt{A}\\\mathtt{A}\\\mathtt{A}\\\mathtt{A}\end{array}}\quad\boxed{\begin{array}{c}\mathtt{E}\\\mathtt{E}\\\mathtt{E}\\\mathtt{E}\\\mathtt{E}\\\mathtt{E}\end{array}}\quad\boxed{\begin{array}{c}\mathtt{I}\\\mathtt{I}\\\mathtt{I}\\\mathtt{I}\\\mathtt{I}\\\mathtt{I}\end{array}}\quad\boxed{\begin{array}{c}\mathtt{O}\\\mathtt{O}\\\mathtt{O}\\\mathtt{O}\\\mathtt{O}\\\mathtt{O}\end{array}}\quad\boxed{\begin{array}{c}\mathtt{U}\\\mathtt{U}\\\mathtt{U}\\\mathtt{U}\\\mathtt{U}\\\mathtt{U}\end{array}}\quad\boxed{\begin{array}{c}\mathtt{A}\\\mathtt{E}\\\mathtt{I}\\\mathtt{O}\\\mathtt{U}\\\mathtt{Y}\end{array}}$$

On obtient ainsi un nouveau mot $\mathtt{m}_6$ qui permet de former une droite de $\mathcal{A}^s$. Cependant $\mathtt{m}_6$ n'a aucune raison d'avoir la bonne couleur. Toutefois, cela fonctionne correctement si le coloriage χ a la propriété *fliptop* stipulant que pour tout mot $\mathtt{m}$ de longueur s et tout mot $\mathtt{m}'$ obtenu à partir de $\mathtt{m}$ en remplaçant certaines occurrences de la lettre $\mathtt{I}$ par la lettre $\mathtt{Y}$, on a $\chi(\mathtt{m}) = \chi(\mathtt{m}')$.

Effectivement si χ a la propriété fliptop, alors le mot $\mathtt{m}_6$ a la même couleur que le mot $\mathtt{m}_3$ puisqu'il est obtenu à partir de ce dernier simplement en changeant certains $\mathtt{I}$ en $\mathtt{Y}$. Les six mots sont donc de la même couleur et on a obtenu une droite monochromatique, comme désiré.

Bien sûr, le problème est qu'il existe plein de coloriages qui n'ont pas la propriété fliptop. Mais aussi extraordinaire que cela puisse paraître, il est possible de contourner ce petit détail. L'idée consiste à introduire l'application suivante :

$$\varphi : \mathtt{a}_1 \dots \mathtt{a}_s \mapsto \underbrace{\mathtt{I...I}\ \mathtt{a}_1\mathtt{...a}_1\ \mathtt{Y...Y}}_{n_1}\ \dots\ \underbrace{\mathtt{I...I}\ \mathtt{a}_s\mathtt{...a}_s\ \mathtt{Y...Y}}_{n_s}$$

où les $\mathtt{a}_i$ sont des lettres prises dans l'alphabet $\mathcal{A}$. Les entiers n_i sont fixés avant φ ainsi que le nombre de $\mathtt{I}$ et de $\mathtt{Y}$ consécutifs qui apparaissent à chaque fois et le nombre de répétitions de chaque lettre. Ainsi, φ dépend de plein de paramètres que l'on fixera au fur et à mesure de la démonstration.

De cette façon, à un mot de s lettres, on associe un mot de $n = n_1 + \ldots + n_s$ lettres et ce de façon injective. En outre si l'on dispose d'un coloriage χ_n sur l'ensemble des mots de n lettres, on peut en déduire un sur l'ensemble des mots de s lettres simplement en posant :

$$\chi_s(\mathtt{m}) = \chi_n(\varphi(\mathtt{m}))$$

Le but à présent est de choisir correctement tous les paramètres afin que le coloriage χ_s soit fliptop. Si l'on parvient à cela, on pourra construire comme expliqué précédemment (avec χ) une droite de $\mathcal{A}^s$ monochromatique (pour χ_s)... et en prenant l'image par φ de cette droite, on obtiendra une droite de $\mathcal{A}^n$ monochromatique (pour χ_n) puisque par construction φ conserve les couleurs.

Il y a peut-être quelque chose de troublant à ce niveau de l'analyse : c'est que l'on ne connaît pas encore n *a priori* et pourtant on a considéré un coloriage χ_n quelconque des mots de $\mathcal{A}^n$. Effectivement, c'est bien vrai. Ce qu'il faut comprendre, c'est que si l'on ne connait pas encore n maintenant, la démonstration va en fournir un explicite en fonction de s et de t, et donc il n'y aura pas de problème. Enfin, plutôt que de longues explications heuristiques, lançons-nous dans la preuve.

On entame une nouvelle récurrence sur s. Évidemment, c'est mal dit puisque s est supposé être fixé. Plus rigoureusement, on va montrer par récurrence sur s' que pour tout

s', il existe des entiers $n_1, \ldots, n_{s'}$ et un entier $n = n_1 + \ldots + n_{s'}$ tels que pour tout coloriage (en r couleurs) de $\mathcal{A}^n$, il existe une application φ de la forme :

$$\varphi : \mathtt{a}_1 \ldots \mathtt{a}_{s'} \mapsto \underbrace{\mathtt{I...I}\ \mathtt{a}_1\mathtt{...a}_1\ \mathtt{Y...Y}}_{n_1}\ \ldots\ \underbrace{\mathtt{I...I}\ \mathtt{a}_{s'}\mathtt{...a}_{s'}\ \mathtt{Y...Y}}_{n_{s'}}$$

induisant sur $\mathcal{A}^{s'}$ un coloriage qui soit fliptop. Ceci est enfin une formulation exacte et s'il vous reste encore des doutes quant au fait que ce dernier énoncé implique le théorème de Hales-Jewett, reprenez à tête reposée les explications précédentes, elles paraîtront probablement bien plus claires. Désormais que l'on a bien compris ce que l'on faisait, continuons à appeler s (au lieu de s') cet indice sur lequel porte la récurrence. Cela ne peut pas porter à préjudice pour la suite puisque la démonstration du théorème de Hales-Jewett s'achère par cette récurrence.

Initialisons la récurrence sur s. Pour $s = 1$, il s'agit de montrer qu'il existe un entier n tel que pour tout coloriage de $\mathcal{A}^n$, il existe une application φ de la forme :

$$\varphi : \mathtt{a}_1 \mapsto \underbrace{\mathtt{I...I}\ \mathtt{a}_1\mathtt{...a}_1\ \mathtt{Y...Y}}_{n}$$

induisant un coloriage fliptop sur $\mathcal{A}$. Or, un coloriage fliptop sur $\mathcal{A}$ est simplement un coloriage qui donne la même couleur à `I` et `Y`. Ainsi, il faut prouver que si n est suffisamment grand, il existe deux mots de la même couleur et de forme respective :

$$\begin{array}{ccc} \mathtt{I...I} & \mathtt{I...I} & \mathtt{Y...Y} \\ \mathtt{I...I} & \mathtt{Y...Y} & \mathtt{Y...Y} \end{array}$$

où chacun des trois blocs a une taille pouvant dépendre du coloriage bien entendu. C'est en fait assez simple à obtenir. nous affirmons[11] qu'il suffit de prendre $n \geqslant r$. En effet, parmi les $n + 1 > r$ mots suivants :

$$\begin{array}{cccccc} \mathtt{I} & \mathtt{I} & \mathtt{I} & \ldots\mathtt{I} & \mathtt{I} & \mathtt{I} \\ \mathtt{Y} & \mathtt{I} & \mathtt{I} & \ldots\mathtt{I} & \mathtt{I} & \mathtt{I} \\ \mathtt{Y} & \mathtt{Y} & \mathtt{I} & \ldots\mathtt{I} & \mathtt{I} & \mathtt{I} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ \mathtt{Y} & \mathtt{Y} & \mathtt{Y} & \ldots\mathtt{Y} & \mathtt{I} & \mathtt{I} \\ \mathtt{Y} & \mathtt{Y} & \mathtt{Y} & \ldots\mathtt{Y} & \mathtt{Y} & \mathtt{I} \\ \mathtt{Y} & \mathtt{Y} & \mathtt{Y} & \ldots\mathtt{Y} & \mathtt{Y} & \mathtt{Y} \end{array}$$

deux d'entre eux ont la même couleur (d'après le principe des tiroirs) et répondent donc au problème. L'initialisation est terminée.

Passons à l'hérédité. On considère dans un premier temps les nombres $n_1, \ldots, n_{s-1}$ déterminés à l'étape précédente de la récurrence, mais attention on prend les nombres qui correspondent à un coloriage par r^t couleurs et non pas par r couleurs. Cela dit, l'hypothèse de récurrence étant valable pour tout nombre de couleurs on a bien le droit de faire cela. Posons $n' = n_1 + \ldots + n_{s-1}$.

On pose (un peu grossièrement) $n_s = t^{r^{n'}}$. Soit χ_n un coloriage des mots de n lettres, où comme toujours $n = n_1 + \ldots + n_s = n' + n_s$. On colorie alors le mot $\mathtt{m}_s \in \mathcal{A}^{n_s}$ par la couleur :

$$\chi_{n_s}(\mathtt{m}_s) = (\chi_n(\mathtt{m}_1\, \mathtt{m}_2\, \ldots\, \mathtt{m}_{s-1}\, \mathtt{m}_s))_{\mathtt{m}_1, \mathtt{m}_2, \ldots, \mathtt{m}_{s-1}}$$

[11] Enfin, Shelah affirme...

Notez que la couleur associée est un uplet de couleurs, les mots $\mathtt{m}_i$ parcourant l'ensemble des mots de $\mathcal{A}^{n_i}$. Il y a donc t^{n_i} choix pour chaque $\mathtt{m}_i$, ce qui fait $t^{n'}$ choix en tout. Ainsi, la couleur associée est plus exactement un $t^{n'}$-uplet de couleurs. La palette regroupant toutes ces nouvelles couleurs a donc pour cardinal n_s et on obtient ainsi une coloration de $\mathcal{A}^{n_s}$ en n_s couleurs.

D'après l'étape d'initialisation de la récurrence, il est possible de trouver un φ_s de la forme :

$$\varphi_s : \mathtt{a}_s \mapsto \underbrace{\mathtt{I}...\mathtt{I}\ \mathtt{a}_s...\mathtt{a}_s\ \mathtt{Y}...\mathtt{Y}}_{n_s}$$

qui soit fliptop pour le coloriage que l'on vient de construire sur $\mathcal{A}^{n_s}$.

Maintenant on a besoin de colorier les mots de $\mathcal{A}^{n'}$ pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence. Pour cela, on remarque que φ_s atteint seulement t éléments dans $\mathcal{A}^{n_s}$, disons $\mathtt{m}_s^{(1)}, \mathtt{m}_s^{(2)}, \dots, \mathtt{m}_s^{(t)}$. Ainsi on peut colorier un mot $\mathtt{m} \in \mathcal{A}^{n'}$ en posant :

$$\chi_{n'}(\mathtt{m}) = \left(\chi_n(\mathtt{m}\,\mathtt{m}_s^{(1)}), \dots, \chi_n(\mathtt{m}\,\mathtt{m}_s^{(t)})\right)$$

On a encore donc modifié la palette : une couleur ici est un t-uplet de couleurs ; il y a donc r^t couleurs, ce qui explique c la valeur considérée au commencement de l'hérédité.

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un φ' convenable pour le coloriage que l'on vient de définir. On pose finalement :

$$\varphi : \mathtt{a}_1 \dots \mathtt{a}_s \mapsto \varphi'(\mathtt{a}_1 \dots \mathtt{a}_{s-1})\ \varphi_s(\mathtt{a}_s)$$

et il ne reste plus qu'à vérifier que φ convient. Soit $\mathtt{m} = \mathtt{a}_1 \dots \mathtt{a}_s$ un mot de s lettres et $\mathtt{m}' = \mathtt{a}'_1 \dots \mathtt{a}'_s$ un autre mot qui se déduit du premier simplement en changeant certaines occurrences de la lettre $\mathtt{I}$ par la lettre $\mathtt{Y}$. Il faut vérifier que $\varphi(\mathtt{m})$ et $\varphi(\mathtt{m}')$ ont la même couleur.

Dans un premier temps, par propriété de φ', les mots $\varphi'(\mathtt{a}_1 \dots \mathtt{a}_{s-1})$ et $\varphi'\left(\mathtt{a}'_1 \dots \mathtt{a}'_{s-1}\right)$ ont la même couleur. Cela signifie que quel que soit l'indice k, les mots $\varphi'(\mathtt{a}_1 \dots \mathtt{a}_{s-1})\ \mathtt{m}_s^{(k)}$ et $\varphi'\left(\mathtt{a}'_1 \dots \mathtt{a}'_{s-1}\right)\ \mathtt{m}_s^{(k)}$ ont la même couleur.

Mais d'autre part, par propriété de φ_s, les mots $\varphi_s(\mathtt{a}_s)$ et $\varphi_s(\mathtt{a}'_s)$ ont la même couleur et donc par définition, il en est de même des mots $\varphi'\left(\mathtt{a}'_1 \dots \mathtt{a}'_{s-1}\right) \varphi_s(\mathtt{a}_s)$ et $\varphi'\left(\mathtt{a}'_1 \dots \mathtt{a}'_{s-1}\right) \varphi_s(\mathtt{a}'_s)$. En regroupant les deux résultats obtenus, et en remarquant que $\varphi_s(\mathtt{a}'_s)$ est l'un des $\mathtt{m}_s^{(k)}$, on déduit que les mots $\varphi(\mathtt{m})$ et $\varphi(\mathtt{m}')$ sont de la même couleur, ce qui est bien ce que l'on voulait prouver.

C'est donc fini !

Annexe : compléments sur le théorème de compacité

Le but de cette annexe est de reprendre de façon rigoureuse les arguments de compacité donnés dans le chapitre 1.4. On commence par définir les prémisses permettant de comprendre le théorème de compacité, on énonce celui-ci, et enfin on explique de nouveau la preuve selon laquelle le théorème de Ramsey fini est une conséquence du théorème de Ramsey infini.

Avant de pouvoir parler d'axiomes, il faut se fixer un langage. Un *langage* est un ensemble de symboles contenant des *constantes*, des symboles de *fonction* et des symboles de *relation*. Chaque symbole de fonction ou de relation vient avec ce que l'on appelle une *arité* qui est le nombre de paramètres sur lesquels la fonction ou la relation porte. Par exemple, le langage de l'arithmétique est[12] $\{0, 1, +, \times, =\}$. Les symboles 0 et 1 sont des constantes, les symboles $+$ et $\times$ des symboles de fonction tous deux d'arité 2 et le symbole $=$ un symbole de relation d'arité 2 également.

On s'autorise ensuite à écrire des formules avec ce langage : une *formule* est une expression « cohérente » n'utilisant que les symboles du langage, des variables, les quantificateurs et les opérateurs logiques tels « $\Rightarrow$ », « $\wedge$ » (pour *et*), *etc.* Notez qu'un quantificateur doit toujours porter sur une variable seule : même si les symboles « $\in$ » et « $[0, 1]$ » fassent partie du langage, on n'a *a priori* pas le droit par d'écrire « $\forall x \in [0, 1]$ », mais il faut le remplacer par « $\forall x\,(x \in [0, 1]) \Rightarrow$ »

Voici plusieurs formules valides du langage de l'arithmétique :

$$\begin{array}{ll} F_1 & 0 + 0 = 1 \\ F_2 & \forall x\,(x + 0 = x) \\ F_3 & (x + y) \times (x + y) = x \times x + y \times y \end{array}$$

Comme on le constate, on a le droit d'écrire toutes les formules que l'on souhaite. Rien pour l'instant ne présage de la véracité ou de la fausseté.

Désormais, on cherche à interpréter ces formules. On se donne pour cela un *modèle* M : c'est un ensemble sur lequel on a selectionné un élément pour chaque symbole de constante, défini une fonction $M^k \to M$ pour chaque symbole de fonction d'arité k et défini une relation d'arité k pour chaque symbole de relation d'arité k.

On dit que le modèle M *satisfait* une formule F, si l'interprétation évidente de F dans le modèle est vérifiée. Ainsi si l'on prend pour M l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ et que l'on interprète chaque symbole comme on le pense, la formule F_1 est fausse et la formule F_2 vraie. Quant à la formule F_3, on ne peut pas répondre car elle n'est ni vraie ni fausse. C'est le problème des formules qui font intervenir des *variables libres*, c'est-à-dire qui ne sont pas quantifiées. On prendra donc soin de ne juger de la satisfaction des formules dans un modèle que si celles-ci ne font pas intervenir de variables libres. De telles formules s'appellent des *formules closes.*

Un *axiome* est juste une formule close, peu importe son sens. Un ensemble (fini ou infini) A est dit *satisfaisable* s'il existe un modèle dans lequel tous les axiomes de A sont satisfaits simultanément. Il est dit *finiment satisfaisable* si pour tout ensemble *fini* $B \subset A$, B est satisfaisable. Le théorème de compacité s'écrit alors :

[12] Parfois, on trouve des variantes.

Théorème 13 (Compacité)**.** *Tout ensemble d'axiomes finiment satisfaisable est satisfaisable.*

Ce théorème utilise de façon cruciale l'axiome du choix. Sans doute, certains cas particuliers peuvent l'éviter mais ne nous attardons pas là-dessus... Plutôt que de discuter ces points de détail, voyons comment il s'applique dans notre situation.

On rappelle que l'on a prouvé le théorème de Ramsey infini et que l'on aimerait en déduire le théorème de Ramsey fini. On aura donc à utiliser la contraposée du théorème de compacité. Plus précisément, on va lister un certain nombre d'axiomes qui ne seront pas satisfaisables en vertu du théorème de Ramsey infini et on va en déduire que cet ensemble d'axiomes n'est pas non plus finiment satisfaisable. Ainsi, on pourra trouver un sous-ensemble fini de ces axiomes qui n'est pas être satisfaisable et cela impliquera le théorème de Ramsey fini.

Quels sont ces axiomes ? Avant de les fixer, il faut fixer un langage. Mais en tout premier lieu, considérons trois entiers k, r et ℓ, et proposons-nous de de montrer le théorème de Ramsey pour $\ell_i = \ell$ pour tout i compris entre 1 et r.

Le langage que l'on retient est constitué d'un nombre dénombrable de symboles de constantes $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ et de r symboles de relation d'arité k. Moralement dire que les éléments $x_1, \ldots, x_k$ sont liés par la relation R_i signifie que la couleur de la partie $\{x_1, \ldots, x_k\}$ est la i-ième couleur. Dégageons les axiomes nécessaires à cela : déjà si deux des x_j sont égaux, les éléments x_j ne doivent être mis en relation par aucun des R_i et si ce n'est pas le cas alors ils doivent l'être par un et un seul. Dans tous les cas, on peut écrire une longue formule n'utilisant que des quantificateurs, des symboles logiques et des symboles du langage pour exprimer ce fait. Appelons cette formule F.

Par ailleurs, fixons une partie finie E de $\mathbb{N}^\star$. On aimerait ajouter l'axiome suivant $\mathcal{A}_E$:

> *Pour toute partie A de E de cardinal ℓ, le coloriage (obtenu* via *l'identification par les symboles de constante) restreint aux parties de A de cardinal k n'est pas monochromatique.*

Comme tout est fini, il est possible de dérouler tous les cas et de parvenir ainsi à une *très* longue formule mathématique exprimant ce qui vient d'être écrit en français. Donnons un exemple pour clarifier les choses. Supposons que $k = r = 2$, $\ell = 3$ et que la partie E soit la partie $\{1, 2, 3, 4\}$. L'axiome $\mathcal{A}_E$ doit ici dire que :

- (quand la partie $A = \{1, 2, 3\}$) parmi les trois couleurs $\chi(x_1, x_2)$, $\chi(x_1, x_3)$ et $\chi(x_2, x_3)$, il y en a deux différentes
- (quand la partie $A = \{1, 2, 4\}$) parmi les trois couleurs $\chi(x_1, x_2)$, $\chi(x_1, x_4)$ et $\chi(x_2, x_4)$, il y en a deux différentes
- *etc.*

Pour exprimer chacune de ces conditions, par exemple, la première, on fait encore une étude exhaustive. Dire que parmi les trois couleurs, il y en a deux différentes, signifie que soit $\chi(x_1, x_2)$ est la première couleur et les deux autres sont la seconde couleur, soit... Au final, on arrive à une formule que personne n'a envie d'écrire.

Appelons cette formule F_E et prenons pour axiome $A_E = F \wedge F_E$. Et prenons ensuite tous les axiomes A_E. L'ensemble de tous les axiomes $\mathcal{A}_E$ n'est pas satisfaisable. En effet s'il l'était, il existerait un ensemble E contenant des éléments $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ tous distincts vérifiant les propriétés traduites par les axiomes $\mathcal{A}_E$. Posons $E' = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, il hérite d'un coloriage de ses parties à k éléments vérifiant tous les axiomes $\mathcal{A}_E$, ce qui contredit directement le théorème de Ramsey infini.

Comme l'ensemble des axiomes $\mathcal{A}_E$ n'est pas satisfaisable, il n'est pas non plus finiment satisfaisable par le théorème de compacité. Comme les axiomes $\mathcal{A}_{E_1}, \ldots \mathcal{A}_{E_n}$ sont impliqués par le seul axiome $\mathcal{A}_E$ avec $E = \cup E_i$, on en déduit qu'il est impossible de satisfaire le seul axiome $\mathcal{A}_E$. Cela signifie qu'il existe une partie A de E de cardinal ℓ tel que le coloriage χ soit constant sur les sous-parties de A de cardinal k. C'est exactement le théorème de Ramsey fini dans le cas où tous les ℓ_i sont égaux mais on a déjà expliqué comment on pouvait s'y ramener.

Annexe : Estimation des nombres mis en jeu

Ramsey

Les neuf nombres de Ramsey non triviaux connus pour $k = r = 2$ sont présentés dans le tableau suivant :

	3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
3	6	9	14	18	23	28	36
4	9	18	25				

où les chiffres écrits en gras correspondent aux entiers ℓ_1 et ℓ_2. Il y a bien dix nombres écrits dans le tableau mais il n'est pas difficile de voir de façon générale que $R(2,2,\ell_1,\ell_2) = R(2,2,\ell_2,\ell_1)$.

Erdös-Szekeres

Appelons $N(k)$ le plus petit entier satisfaisant l'énoncé du théorème. On a démontré que $N(k) \leqslant R(4,2,5,k)$. Par des considérations géométriques, Erdös et Szekeres ont prouvé que :

$$2^{k-2} + 1 \leqslant N(k) \leqslant \mathrm{C}_{2n-4}^{n-2} + 1$$

On sait que $N(k) = 2^{k-2} + 1$ pour $k = 3, 4, 5$ et on conjecture que l'égalité a lieu pour tout $k \geqslant 3$. On en est encore loin car la meilleure borne supérieure connue est due à Tóth et Valtr (1998) qui ont prouvé que :

$$N(k) \leqslant \mathrm{C}_{2n-5}^{n-3} + 2$$

Schur

Appelons $S(r)$ le plus petit entier vérifiant l'énoncé du théorème. On sait que $S(1) = 2$, $S(2) = 5$, $S(3) = 14$ et informatiquement que $S(4) = 45$. Schur a prouvé l'encadrement :

$$\frac{3^r + 1}{2} \leqslant S(r) \leqslant e \cdot r!$$

Pour la minoration, on observe que si l'on dispose d'un coloriage en r couleurs de $\{1, \ldots, n\}$ sans solution monochrome à l'équation $x + y = z$, alors on peut colorier l'ensemble $\{1, \ldots, 3n+1\}$ en $r+1$ de sorte que l'équation n'ait toujours pas de solution monochrome : si $x \leqslant n$ était colorié avec la couleur c_i, il le reste et on colorie $x + 2n + 1$ par la couleur c_i ; finalement on colorie les entiers restants de la couleur c_{r+1}.

On a depuis peu amélioré cet encadrement mais pas de façon significative.

Bibliographie commentée

Le livre incontournable sur le sujet est [1]. Écrit par trois des plus grands spécialistes du domaine, il présente dans un premier temps les résultats principaux de la théorie de Ramsey de façon très progressive, claire et pédagogique. Cette exposition ne nécessite aucun pré-requis particulier qui serait au-delà du bagage classique d'un élève de licence. Puis, dans les derniers chapitres, d'un niveau technique plus élevé, les auteurs explorent les récents développements de la discipline. Excellent.

On pourra également consulter [2], un livre très proche du précédent, mais l'approche et la présentation plus traditionnelles des résultats montrent bien qu'il s'agit plus d'un cours sur le sujet, accompagné d'exercices corrigés. Moins exhaustif, il est toutefois plus récent et mérite le détour.

La théorème de Ramsey a également des conséquences en théorie des jeux, comme le montre l'article [3].

Pour des problèmes plus basiques, on pourra consulter [4] et [5] qui introduisent respectivement les notions de graphes et d'hypergraphes. Ils ont l'avantage de ne demander pratiquement pas de pré-requis.

Enfin, pour les problèmes de logique que nous évoquions, en particulier une étude un peu approfondie du théorème de compacité, on pourra se reporter à [6]. Si l'on veut des détails sur l'axiome du choix, il faudra commencer par apprendre un peu de théorie des ensembles, par exemple en lisant [7]. Une référence sur le sujet est ensuite [8].

Références

[1] R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey Theory*, second edition, Wiley, 1990

[2] S.D. Adhikari, *Aspects of combinatorics and combinatorial number theory*, Alpha Science, 2002

[3] P. Tougne, *Jeux sur les graphes* in *La mathématique des jeux*, Bibliothèque Pour la Science, Belin

[4] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1967

[5] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970

[6] R. Fraïssé, *Cours de logique mathématique, tome 1 : relation, formule logique, compacité, complétude*, Gauthier-Villars, Paris, 1967

[7] J.L. Krivine, *Théorie des ensembles*, Cassini, Paris, 1998

[8] T. Jech, *The axiom of choice*, North-Holland, 1973