Équations algébriques

Une équation n'est en fait rien d'autre qu'une égalité entre deux membres. Souvent, dans les problèmes, l'on veut déterminer une certaine quantité et l'énoncé se traduit simplement par une égalité qui fait intervenir la quantité inconnue. Comme le fait de nommer les choses permet souvent de mieux les étudier, ce que l'on fait, c'est que l'on donne un certain nom à notre inconnu, le plus souvent on l'appelle x. On obtient ainsi une égalité que doit vérifier x, une équation comme on dit. Bien sûr, il y a des équations de toutes sortes. Il y a les affines, c'est-à-dire celles qui sont de la forme $ax + b = 0$. Il y a les équations de degré 2, celles de degré 3, etc. Mais il y en a encore tout un tas d'autres, notamment celles de la forme $a^x = b$, ou encore $\cos(5x+1) = 3^{x^2} - 2x$. Résoudre une équation, c'est trouver *tous* les nombres x qui vérifient l'égalité de départ. Ce que l'on appelle *équation algébrique*, c'est une équation pouvant se mettre sous la forme $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$, où les a_i sont des nombres réels. Ce sont en fait les équations d'un certain degré. Je vais donner par la suite des méthodes pour résoudre les équations algébriques de degré allant de 1 à 4.

Le premier degré

Il n'y a pas grand chose à dire... Enfin si, mais tu dois déjà le savoir. Les équations du premier degré sont celles qui peuvent se mettre sous la forme $ax + b = 0$. Il y a une unique solution qui est $x = \frac{-b}{a}$. Je signale toutefois qu'il faut faire attention au cas particulier où $a = 0$. Dans ce cas, l'expression donné juste au-dessus n'a aucun sens, car est-il encore utile de le rappeler, il est interdit de diviser par 0. Mais dans ce cas, résoudre l'équation est encore plus simple. En effet, si $b = 0$, tout x est solution et si $b \neq 0$, il n'y a aucune solution.

Le second degré

L'équation générale se met ici sous la forme $ax^2+bx+c = 0$. Bien entendu, l'on peut supposer que $a \neq 0$, car sinon l'équation serait en fait de degré 1 et donc releverait du paragraphe précédent. Regardons comment l'on peut faire pour résoudre.

Tout d'abord je dis que quitte à diviser par a (que l'on vient de supposer non nul, je tiens à le préciser), on peut supposer que $a = 1$. Bon, qu'est-ce que ça veut dire que cette phrase barbare ? Je vais l'expliquer. On a au début à résoudre l'équation $ax^2+bx+c = 0$. Si l'on divise cette égalité par a (supposé différent de 0), on obtient $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Il s'agit d'une équation de la forme précédente, à la différence près que désormais il n'y a plus de coefficient devant x^2, ou ce qui revient au même, que désormais le coefficient devant x^2 vaut 1. Ainsi si l'on sait résoudre les équations du second degré qui sont telles que le coefficient devant le terme en x^2 est 1, on saura résoudre toutes les équations du second degré puisque l'on vient de voir qu'en fait toutes ces équations se ramènent à ce cas particulier. On peut donc se restreindre à l'étude des équations du second degré qui sont telles que $a = 1$ et c'est ce que nous allons faire par la suite.

Question 1. *Montrer que quitte à poser $x' = x + \frac{b}{2}$, on peut supposer que $b = 0$.*

Question 2. *Résoudre finalement l'équation simplifiée qui est $x^2 + c = 0$. On fera attention à distinguer les cas $c < 0$, $c = 0$ et $c > 0$.*

En fait, dans la pratique, on présente les calculs de la façon suivante. On cherche à résoudre $ax^2 + bx + c = 0$. Pour cela, on calcule ce que l'on appelle le *discriminant* de l'équation qui est ici $\Delta = b^2 - 4ac$. La nature des solutions dépend alors du signe de Δ.

Question 3. *Montrer que si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solutions. Montrer que si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution qui est $\frac{-b}{2a}$. Montrer que si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions qui sont $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.*

Question 4. *On considère le système d'équations :*

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = S \\ xy = P \end{array} \right.$$

où S et P sont des nombres donnés. Expliquer pourquoi résoudre ce système revient en fait exactement à résoudre l'équation en t, $t^2 - St + P = 0$. On fera bien attention à n'oublier aucun cas.

Le troisième degré

L'équation à résoudre ici est $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Comme précedemment, on va supposer $a \neq 0$, car sinon l'équation serait en fait de degré 2 et relèverait du paragraphe précédent.

Question 5. *Montrer que quitte à diviser par a puis à poser $x' = x + \frac{b}{3}$, on peut supposer que $a = 1$ et que $b = 0$.*

Ainsi, l'équation qu'il nous faut résoudre devient $x^3 + cx + d = 0$, ce qui est quand même a priori plus simple. L'idée pour faire cela est de chercher x sous la forme $p + q$, en espérant que ceci donne suffisamment de liberté pour pouvoir imposer au moins une autre condition sur p et q et obtenir un problème plus simple. En substituant $p + q$ à x, l'équation devient :

$$p^3 + q^3 + (p + q)(3pq + c) + d = 0$$

Question 6. *Le vérifier.*

La condition supplémentaire que l'on aimerait imposer sur p et q est $3pq + c = 0$. On obtient ainsi le système suivant dont une solution va nous donner une solution de notre équation de départ.

$$\left\{ \begin{array}{l} 3pq = -c \\ p^3 + q^3 = -d \end{array} \right.$$

Question 7. *En s'inspirant de la question 4, résoudre le système précédent. Montrer que si $\frac{d^2}{4} + \frac{c^3}{27} \geqslant 0$, on obtient effectivement par cette méthode une solution à l'équation $x^3 + cx + d = 0$.*

On peut montrer que si $\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}>0$, alors la solution que l'on a trouvé précédemment est en fait l'unique solution de l'équation. Il suffit pour cela d'étudier la fonction f définie par $f(x)=x^3+cx+d$. Dans le cas où $\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}=0$, l'étude de la fonction montre qu'il y a en fait deux solutions, celle donnée par la méthode précédente qui est $-2\sqrt{\frac{-c}{3}}=-2\sqrt[3]{\frac{d}{2}}$ (c est ici forcément un nombre négatif) et une autre qui est $\sqrt{\frac{-c}{3}}=\sqrt[3]{\frac{d}{2}}$. (Ces deux solutions n'en sont en fait qu'une dans le cas très particulier où $c=d=0$). Le dernier cas qui est $\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}<0$ est beaucoup plus frustrant. On peut montrer encore en étudiant la fonction f qu'il y a trois solutions mais la méthode précédente n'en fournit aucune. En fait, ce que l'on aimerait faire, c'est donner un sens aux racines carrées de nombres négatifs. Ceci se résout par l'introduction des nombres complexes qui ont d'ailleurs été développés à l'origine précisément pour résoudre ce genre d'équations, mais nous n'allons pas détailler leur étude ici. Sache toutefois que combinée à la puissance des nombres complexes, la méthode précédente permet de résoudre au moins en théorie toutes les équations algébriques du troisième degré.

Question 8. *Vérifier que la méthode proposée est impuissante face à l'équation $x^3-2x+1=0$. Vérifier pourtant que 1, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ sont trois solutions. En fait, ce sont les seules.*

Le quatrième degré

L'équation à résoudre ici est $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ et comme d'habitude on va supposer que $a\neq 0$.

Question 9. *Montrer que quitte à diviser par a puis à faire un changement de variable que l'on précisera, on peut supposer que $a=1$ et $b=0$.*

L'équation à résoudre devient alors $x^4+cx^2+dx+e=0$. Pour faire cela, on introduit un paramètre t (que l'on va choisir judicieusement par la suite) et l'on réécrit l'équation sous la forme suivante :

$$\left(x^2+t\right)^2-\left[(2t-c)\,x^2-dx+\left(t^2-e\right)\right]=0$$

Question 10. *Vérifier que l'équation est bien équivalente à l'égalité écrite ci-dessus.*

On aimerait en fait que la partie entre crochets de l'expression précédente puisse s'écrire comme un carré car dans ce cas, on saurait factoriser notre expression et l'on n'aurait plus qu'à résoudre deux équations de degré 2, ce que l'on sait théoriquement déjà faire.

Question 11. *Vérifier que si t est tel que $4\,(2t-c)\left(t^2-e\right)=d^2\neq 0$, alors on a :*

$$(2t-c)\,x^2-dx+\left(t^2-e\right)=(2t-c)\left(x-\frac{d}{4t-2c}\right)^2$$

Conclure pour le cas $d\neq 0$ (attention au signe de $2t-c$).

Question 12. *Résoudre l'équation dans le cas $d=0$. On pourra poser $X=x^2$.*

Et après...

De jolies méthodes générales de ce genre n'existent plus pour les degrés supérieurs à 5... La phrase précédente est volontairement floue car il est difficile d'expliquer précisément ce que l'on sait à ce propos sans rentrer dans des détails trop techniques et donc je ne vais pas le faire. (Si tu le souhaites, je pourrais faire une feuille d'exercices de ce genre pour t'expliquer ce que j'entends par " De telles méthodes n'existent pas " et peut-être même te le faire démontrer mais bon...)

Enfin, cela ne veut pas dire que l'on est totalement impuissant face à des équations de degré supérieur. Je vais expliquer dans la suite comment on peut espérer les aborder.

Donc on s'attaque à l'équation $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$, n n'étant pas forcément supérieur à 5 : tout ce que je vais dire s'applique à un n quelconque et souvent il est préférable d'utiliser les méthodes que je vais décrire par la suite que les méthodes générales qui sont en général un peu lourdes. On peut supposer comme toujours que $a_n \neq 0$. On va poser $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$. L'idée fondamentale est que si l'on a trouvé une solution, disons a vérifiant donc $P(a) = 0$, on est ramené à un problème plus simple qui est celui de résoudre une équation de degré $n-1$. On verra plus loin comment on fait pour trouver un tel a (en général c'est par chance...), pour l'instant supposons que l'on dispose d'une solution a et voyons comment on réussit à faire baisser le degré de 1.

Question 13. *Montrer que pour tout entier k et tout réel y, on dispose de la factorisation suivante :*

$$x^k - y^k = (x-y)\left(x^{k-1} + yx^{k-2} + y^2x^{k-1} + \ldots + y^{k-2}x + y^{k-1}\right)$$

En déduire que $P(x) - P(y)$ s'écrit $(x-y)\,Q_y(x)$ où Q_y est une expression de degré $n-1$ en x. En particulier comme a est solution de $P(x) = 0$, on peut écrire :

$$P(x) = (x-a)\,Q_a(x)$$

Question 14. *En déduire qu'une équation de degré n a au plus n solutions. En particulier cela démontre l'affirmation de la question 8.*

Il ne reste plus qu'à donner une méthode effective pour calculer le polynôme Q_a. Présentons-la sur un exemple. Prenons $P(x) = x^5 - 5x^3 + 8$, l'équation à résoudre est donc $x^5 - 5x^3 + 8 = 0$. On remarque que 2 est une solution. On présente en fait les calculs dans le tableau qui suit. Sur la première ligne, on écrit les coefficients qui apparaissent dans notre équation dans l'ordre (ie du degré le plus élevé au degré 0) en n'oubliant pas les zéros éventuels. On abaisse alors le premier coefficient sur la troisième ligne. On multiplie le nombre que l'on vient de recopier par a (ici par 2) et on écrit le résultat sur la case immédiatement en haut à droite. On somme les deux nombres écrits dans la deuxième colonne et on reporte le résultat dans la troisième ligne... et on continue ainsi.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 8 \\
+ & & 2 & 4 & -2 & -4 & -8 \\
 & & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 & \times 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & -1 & -2 & -4 & 0
\end{array}$$

Le zéro tout en bas à droite correspond en fait à la valeur de $P(2)$. Ainsi si un jour, après application de cette méthode de calcul, on ne trouve pas un zéro en bas à droite, c'est qu'il y a en fait un erreur quelque part. Un autre point remarquable, c'est qu'il est souvent beaucoup plus rapide de calculer la valeur de P en un certain réel a en utilisant cette méthode qu'en calculant bêtement. Ainsi si l'on veut trouver une solution en testant un peu au hasard, ce n'est pas une mauvaise idée de choisir des nombres a et de leur faire subir le sort que l'on vient de décrire. Si l'on ne trouve pas un zéro en bas à droite, c'est que l'on avait pas fait un choix judicieux. Sinon, c'est que l'on est effectivement tombé sur une solution et on a déjà la décomposition.

À propos, je n'ai toujours pas dit comment on retrouvait la factorisation dans notre tableau. C'est en fait tout simple : les nombres qui apparaissent sur la dernière ligne à l'exception du dernier sont les coefficients rangés dans le bon ordre de Q_a. Autrement dit, dans notre cas particulier, on a :

$$P(x) = (x-2)\left(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 4\right)$$

et on est ramené à résoudre une équation de degré 4.

Question 15. *Montrer que la méthode expliquée ci-dessus fonctionne bien.*

Voyons maintenant comment l'on arrive à trouver des solutions particulières. Il n'y a en fait pas de méthodes générales et souvent il faut y aller au petit bonheur la chance. Toutefois, si l'on cherche des solutions rationnelles et que l'équation que l'on cherche à résoudre est à coefficients entiers, il y a quand même moyen d'en éliminer pas mal. Plus précisément, revenons à notre situation de départ, c'est-à-dire dans celle où l'on cherche à résoudre $a_n x^n + ... + a_0 = 0$. On a déjà vu que l'on pouvait supposer $a_n \neq 0$. En fait, on peut aussi supposer $a_0 \neq 0$, car sinon 0 est une solution évidente et l'on factorise par x tant que c'est possible. Nous supposerons en outre dans la suite de ce paragraphe que tous les a_i sont des entiers.

Question 16. *Montrer que si $\frac{p}{q}$ est une solution écrite sous forme irréductible (c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux), alors p est un diviseur de a_0 et q est un diviseur de a_n. (On pourra utiliser le lemme de Gauss qui dit que si un nombre a divise un produit bc et que a et b sont premiers entre eux, alors a divise c).*

Ainsi si une fraction $\frac{p}{q}$ est telle que p ne divise pas a_0 *ou* q ne divise pas a_n, elle n'a aucune chance d'être solution de l'équation. Ceci réduit donc à un nombre fini (et en général petit) le nombre de tests à faire pour trouver une solution rationnelle si elle existe. Notons en particulier que si $a_n = 1$, alors les solutions rationnelles sont en fait entières et elles se comptent parmi les diviseurs de a_0 et que si $a_n = a_0 = 1$, la seule solution rationnelle possible est 1.

Les équations réciproques

Il y a un type d'équations bien particulier sur lequelles on arrive à faire des manipulations intéressantes. Il s'agit des *équations réciproques*. Ce sont celles qui sont de la forme $a_n x^n + \ldots + a_0 = 0$ où $a_n = a_0 \neq 0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, etc. Je ne vais pas expliquer la théorie de façon générale mais juste la présenter sur un exemple. Prenons l'équation :

$$x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0$$

La méthode consiste d'abord à tout diviser par x^3, on obtient :

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0$$

Question 17. *Pourquoi le fait de diviser par x^3 ne change pas les solutions dans ce cas particulier ? Et qu'en est-il dans le cas général ?*

On pose ensuite $X = x + \frac{1}{x}$. La structure de l'équation de départ permet de prouver que X vérifie une certaine équation algébrique de degré plus petit.

Question 18. *Montrer que dans ce cas, l'équation vérifiée par X est $X^3 - 2X^2 + 1 = 0$. Expliquer comment on arrive à trouver cette équation dans le cas général.*

Question 19. *Essayer d'appliquer la méthode générale des équations de degré 3 pour résoudre l'équation vérifiée par X.*

C'est laborieux, hein. Et puis en plus, si je ne me suis pas trompé, tu devrais tomber dans le cas où justement cette méthode ne fonctionne pas. Enfin c'est pas grave, on va s'en sortir quand même. Pour cela, on cherche une solution particulière, commençons par les rationnelles. D'après ce que l'on a dit précédemment, la seule solution rationnelle possible est 1. Il faut essayer...

Question 20. *Vérifier que 1 est effectivement solution. Résoudre l'équation en X. En déduire les solutions de l'équation de départ.*