

Trisection de l'angle et duplication du cube

Xavier Caruso

Janvier 2008

Résumé

Le but de cette note est de montrer que les deux problèmes historiques de constructions à la règle et au compas qui sont la trisection de l'angle et la duplication du cube sont, en un sens, indépendants. Précisément, on montre que l'utilisation d'un instrument qui duplique le cube ne permet de trisecter aucun angle supplémentaire que ne le permettent, seuls, la règle et le compas. Et, réciproquement, on prouve que la duplication du cube reste impossible si l'on s'autorise à utiliser un instrument qui trisecte les angles.

Mots-clés : constructions à la règle et au compas, extensions de corps.

1 Rappel sur les réels constructibles

Soit (O, I, J) un repère orthonormé du plan affine standard. On rappelle la définition des points constructibles à la règle et au compas.

Définition 1. Soit M un point du plan. On dit que M est *constructible à la règle et au compas* s'il existe une suite de points M_0, M_1, \dots, M_n , avec $M_0 = O$, $M_1 = I$, $M_n = M$ et pour tout $i \geq 2$, M_i est obtenu de l'une des trois façons suivantes :

- c'est l'intersection des deux droites $(M_a M_b)$ et $(M_c M_d)$ avec $a, b, c, d < i$;
- c'est une intersection de la droite $(M_a M_b)$ et du cercle de centre M_c et de rayon $M_d M_e$ avec $a, b, c, d, e < i$;
- c'est une intersection du cercle de centre M_a et de rayon $M_b M_c$ avec le cercle de centre M_d et de rayon $M_e M_f$ avec $a, b, c, d, e, f < i$.

Un nombre réel est *constructible à la règle et au compas* (ou seulement *constructible*) si c'est l'abscisse d'un point constructible.

On montre facilement que le point de coordonnées (x, y) est constructible à la règle et au compas si, et seulement si les réels x et y sont tous les deux constructibles. Le théorème fondamental concernant les nombres réels constructibles est le suivant. On pourra en trouver une preuve dans [1], livre entièrement consacré à la problématique des constructions à la règle et/ou au compas.

Théorème 2. *L'ensemble des nombres constructibles est le plus petit sous-corps de \mathbb{R} stable par racine carrée.*

Autrement dit, un nombre réel x est constructible si, et seulement si il existe des corps $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{R}$ avec $x \in K_n$ et $[K_{i+1} : K_i] = 2$ pour tout i .

En utilisant le fait que $\sqrt[3]{2}$ ou $\cos(\frac{\pi}{9})$ sont algébriques de degré¹ 3 sur \mathbb{Q} , on montre qu'ils ne sont pas constructibles à la règle et au compas. Ainsi la duplication du cube et la trisection de l'angle sont impossibles avec ces seuls instruments. Classiquement, on cherche à lever l'impossibilité en autorisant de nouveaux outils (si possible faciles à réaliser en pratique). Par exemple, l'autorisation d'un instrument qui permet de tracer des coniques permet de résoudre simultanément les deux problèmes précédents. On renvoie le lecteur à [2] pour une explication détaillée de ce dernier point.

Notre but, dans cet article, est quelque peu différent : nous cherchons à savoir dans quelle mesure le fait de savoir résoudre l'un des problèmes nous aide à résoudre l'autre.

¹Par définition, le *degré* d'une extension de corps L/K est la dimension de L comme K -espace vectoriel.

2 Avec des outils supplémentaires

Dans cette section, nous étudions l'impact de nouveaux outils, que sont le duplicateur de cube et le trisecteur d'angles, sur les nombres constructibles. Comme nous l'avons dit, certains mathématiciens ont imaginé de véritables instruments (en général des arrangements mécaniques relativement simples, et en tout cas tout à fait réalisables) qui permettent ces constructions. Notre but, ici, n'est pas d'étudier le fonctionnement de ces objets, mais, bel et bien, de supposer qu'il existe un outil (d'origine divine si l'on veut) qui, au choix, duplique les cubes ou trisecte les angles, et surtout *ne fait rien de plus* !

Le duplicateur de cube

Le duplicateur de cube est, par définition, un instrument qui fabrique, à partir d'un segment de longueur a , un segment de longueur $a \cdot \sqrt[3]{2}$. À partir de là, on définit naturellement la notion de point constructible à la règle, au compas et au duplicateur de cube. Les abscisses de ces points sont les nombres réels *constructibles au duplicateur de cube*. En copiant la preuve du théorème 2, on montre facilement la caractérisation suivante :

Théorème 3. *Un nombre réel x est constructible au duplicateur de cube si, et seulement si il existe des corps $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{R}$ avec $x \in K_n$ et $[K_{i+1} : K_i] = 2$ pour tout i .*

Le trisecteur d'angle

Intéressons-nous à présent au trisecteur d'angle. Comme son nom l'indique, c'est un outil qui permet de diviser un angle en trois angles de même mesure. Signalons tout de suite qu'un angle étant défini modulo 2π , son tiers est défini modulo $\frac{2\pi}{3}$. Ainsi, le trisecté d'un angle n'est pas uniquement déterminé, mais correspond à trois directions qui font entre elles des angles de $\frac{2\pi}{3}$. Comme $\cos(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$ est clairement un réel constructible, ces trois directions sont constructibles dès lors que l'une d'entre elles l'est. Ainsi, on pourra au choix supposer que le trisecteur d'angle est un instrument qui fournit une seule de ces directions, ou bien les trois à la fois.

La notion de point constructible à la règle, au compas et au trisecteur d'angle, ainsi que celle de nombre réel constructible au trisecteur d'angle se définissent alors naturellement.

Théorème 4. *Un réel x est constructible au trisecteur d'angle si, et seulement si il existe des corps $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{R}$ avec $x \in K_n$ et, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$*

- soit l'extension K_{i+1}/K_i est quadratique² ;
- soit le corps K_{i+1} est obtenu en ajoutant à K_i une racine d'un polynôme irréductible (sur K_i) de la forme $4X^3 - 3X - a$ avec $a \in K_i$ et $|a| < 1$.

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que quitte à reporter l'angle sur le cercle trigonométrique avant de le trisecter, on peut supposer que le trisecteur d'angle ne fonctionne qu'avec des angles de la forme \widehat{IOM} où M a pour coordonnées $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. De plus, construire un trisecté de \widehat{IOM} revient à construire le point N de coordonnées $(\cos(\frac{\alpha}{3}), \sin(\frac{\alpha}{3}))$. Finalement, $\cos(\frac{\alpha}{3})$ est racine du polynôme $4X^3 - 3X - \cos \alpha$.

Avec les remarques précédentes, la preuve se termine comme celle du théorème 2. □

3 Indépendance des instruments

Nous montrons finalement, en un sens, que la trisection de l'angle et la duplication du cube sont deux problèmes orthogonaux. On commence par prouver que le trisecteur d'angle n'est d'aucune aide pour dupliquer le cube. Précisément :

Théorème 5. *Le nombre $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible au trisecteur d'angle.*

²Une extension *quadratique* est une extension de degré 2.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. D'après le théorème 4, il existe une tour d'extensions $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset \mathbb{R}$ avec $\sqrt[3]{2} \in K_n$ et pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$:

- soit l'extension K_{i+1}/K_i est quadratique ;
- soit K_{i+1} est le corps obtenu en ajoutant à K_i une racine d'un polynôme de la forme $4X^3 - 3X - a$ avec $a \in K_i$ et $|a| \leq 1$.

Supposons en outre n minimal. Ceci implique que $\sqrt[3]{2} \notin K_{n-1}$. Soit P le polynôme minimal de $\sqrt[3]{2}$ sur K_{n-1} ; c'est un diviseur de $X^3 - 2$ qui n'est pas de degré 1 par ce qui précède. Il ne peut pas non plus être de degré 2. En effet, dans le cas contraire, on pourrait écrire $X^3 - 2 = P(X)Q(X)$ avec Q de degré 1, ce qui entraînerait l'existence dans K_{n-1} d'une racine de $X^3 - 2$. Or, par hypothèse, $K_{n-1} \subset \mathbb{R}$, et il est clair que la seule racine réelle de $X^3 - 2$ est $\sqrt[3]{2}$ qui, on l'a vu, n'est pas élément de K_{n-1} . Ainsi, P est de degré 3 et donc, nécessairement, $P(X) = X^3 - 2$.

Il en résulte que K_n est au moins de degré 3 sur K_{n-1} et donc que l'on ait dans la seconde alternative : K_n s'obtient en ajoutant à K_{n-1} une racine x de $4X^3 - 3X - a$ avec $a \in K_{n-1}$ et $|a| < 1$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 4t^3 - 3t - a$. On a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \pm\infty$ et $f(\pm\frac{1}{2}) = a \mp 1$. De $|a| < 1$, on déduit que f s'annule trois fois sur \mathbb{R} . Ainsi tous les morphismes de K_{n-1} -algèbres $K_n \rightarrow \mathbb{C}$ prennent leurs valeurs dans \mathbb{R} , puisqu'ils envoient nécessairement x sur un zéro de f . Si on avait $\sqrt[3]{2} \in K_n$, on aurait $K_{n-1}[\sqrt[3]{2}] \subset K_n$. Comme ces deux corps sont de degré 3 sur K_{n-1} , il y aurait égalité. Mais alors, le morphisme de K_{n-1} -algèbres $K_n \rightarrow \mathbb{C}$, $\sqrt[3]{2} \mapsto j\sqrt[3]{2}$ ne prendrait pas ses valeurs dans \mathbb{R} . On a une contradiction de laquelle découle le théorème. \square

Maintenant la « réciproque » :

Théorème 6. *Soient A, B et C trois points constructibles à la règle et au compas. Le trisecté de l'angle \widehat{BAC} est constructible à la règle et au compas, si et seulement s'il est constructible à la règle, au compas et au duplicateur de cube.*

Démonstration. Le sens direct est évident.

Pour la réciproque, quitte à reporter l'angle (opérateur clairement possible à la règle et au compas seuls), on peut supposer que $B = I$, $A = O$ et que C est un point du cercle trigonométrique ; notons $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ses coordonnées. D'après le théorème 2, il existe une tour d'extensions quadratiques $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n$ avec $a = \cos \alpha \in K_n$ et $K_n \subset \mathbb{R}$.

Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, notons D_i le point de coordonnées $(\cos(\frac{\alpha+2i\pi}{3}), \sin(\frac{\alpha+2i\pi}{3}))$. Par hypothèse, l'un de ces points (et donc tous) est constructible à la règle, au compas et au duplicateur de cube. Ainsi, il existe une seconde tour d'extensions quadratiques $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m$ avec $x_i = \cos(\frac{\alpha+2i\pi}{3}) \in L_m$ et $L_m \subset \mathbb{R}$. En regardant, pour chaque $m' \in \{0, 1, \dots, m\}$, le sous-corps de \mathbb{R} engendré par K_n et $L_{m'}$, on montre qu'il existe une autre tour d'extensions quadratiques $K_n[\sqrt[3]{2}] = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_s$ avec $x_i \in M_s$ et $M_s \subset \mathbb{R}$. Parmi toutes les tours précédentes (i étant susceptible de varier) choisissons-en une pour lequel s est minimal et notons j l'indice i correspondant.

Supposons $s > 0$. Notons P le polynôme minimal de x_j sur M_{s-1} . La minimalité de s assure que x_j n'appartient pas à M_{s-1} . Ainsi P est de degré au moins 2 et donc de degré 2 puisque l'extension M_s/M_{s-1} est quadratique. De plus, P est un diviseur de $Q(X) = 4X^3 - 3X - a = 4(X - x_0)(X - x_1)(X - x_2)$. Il s'ensuit que l'un des x_i — celui qui n'est pas racine de P — est élément de M_{s-1} , contredisant ainsi la minimalité de s . On en déduit que $s = 0$, puis que tous les x_i sont dans $K_n[\sqrt[3]{2}]$. Par l'égalité des degrés, il vient $K_n[x_0] = K_n[\sqrt[3]{2}]$. On conclut alors comme dans la preuve du théorème précédent en montrant que tous les K_n -plongements complexes de $K_n[x_0]$ sont en fait réels, alors que ce n'est pas le cas pour $K_n[\sqrt[3]{2}]$. \square

4 Conclusion

Nous avons étudié précédemment les liens entre duplication du cube et trisection de l'angle. Il y a *a priori* d'autres problèmes célèbres dont on pourrait avoir envie d'étudier l'indépendance vis-à-vis des précédents. Nous pensons notamment à la quadrature du cercle à la règle et au compas,

dont le théorème 2 assure également l'impossibilité lorsque l'on sait que π est transcendant sur \mathbb{Q} . En utilisant des méthodes similaires aux précédentes, on peut montrer — et on laisse l'exercice au lecteur — qu'il y a à nouveau indépendance. C'est en fait (beaucoup plus facile et) beaucoup moins surprenant dans cette situation puisque π et $\sqrt[3]{2}$ (ou $\cos(\frac{\pi}{3})$) n'ont pas vraiment les mêmes propriétés algébriques : le premier est transcendant, alors que le second est algébrique sur \mathbb{Q} . En ce sens, donc, le cas que nous avons étudié est un de ceux qui méritaient le plus d'attention étant donné que les équations associés d'une part à la duplication du cube et d'autre part à la trisection de l'angle ont un air de famille évident.

Références

- [1] Carrega J.C., *Théorie des corps : la règle et le compas*, Hermann 2001
- [2] Videla C.R., *On points constructible from conics.*, Math. Intelligencer **19** (1997), 53–57.