

Conjecture de l'inertie modérée de Serre

Xavier Caruso

Octobre 2007

Résumé

On considère K un corps complet pour une valuation discrète, de caractéristique nulle et dont le corps résiduel est supposé parfait de caractéristique p . On appelle e l'indice de ramification absolue de K , \mathcal{O}_K son anneau des entiers, et \bar{K} une clôture algébrique. Soit X_K un schéma propre et lisse sur K admettant un modèle propre et semi-stable X sur \mathcal{O}_K . Généralisant les résultats de Breuil (valables pour $e = 1$), on démontre dans cet article un isomorphisme de périodes reliant le r -ième groupe de cohomologie étale de $X_{\bar{K}}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et un r -ième groupe de cohomologie log-cristalline de la fibre spéciale de X . Nous avons toutefois les restrictions $er < p - 1$ et $e(r + 1) < p - 1$ si $n > 1$.

On en déduit une preuve complète de la conjecture de Serre sur l'inertie modérée (voir [Ser72]).

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 2 |
| 2 | Les objets d'algèbre linéaire | 3 |
| 2.1 | La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ | 3 |
| 2.1.1 | L'anneau S | 4 |
| 2.1.2 | Définition des catégories | 4 |
| 2.2 | Les objets tués par p | 5 |
| 2.2.1 | La catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ | 5 |
| 2.2.2 | Le cas $r > 0$: la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ | 6 |
| 2.2.3 | Le cas $r = 0$ | 8 |
| 2.3 | Foncteurs vers les représentations galoisiennes | 10 |
| 2.3.1 | Un anneau de périodes | 11 |
| 2.3.2 | La version contravariante | 11 |
| 2.3.3 | La version covariante | 13 |
| 2.3.4 | Lien entre les foncteurs T_{st}^* et $T_{st\star}$ | 16 |
| 2.3.5 | Le cas $r = 0$ | 20 |
| 3 | Les faisceaux sur le site log-syntomique | 20 |
| 3.1 | Rappels et préliminaires | 20 |
| 3.1.1 | Log-schémas et sites usuels | 20 |
| 3.1.2 | Topologie log-syntomique | 21 |
| 3.1.3 | Plusieurs bases | 22 |
| 3.2 | Définition des faisceaux | 22 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.3 | Calculs locaux | 24 |
| 3.3.1 | Méthode générale | 24 |
| 3.3.2 | Calcul des faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$ et $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ sur le petit site syntomique | 25 |
| 3.3.3 | Calcul en caractéristique p | 27 |
| 3.4 | Les opérateurs | 28 |
| 3.4.1 | Le Frobenius | 28 |
| 3.4.2 | La monodromie | 30 |
| 3.4.3 | Sur les autres bases | 30 |
| 3.5 | Les faisceaux « car » | 31 |
| 4 | Calcul de la cohomologie cristalline | 33 |
| 4.1 | En caractéristique p | 33 |
| 4.1.1 | Liberté des groupes de cohomologie | 34 |
| 4.1.2 | Fin de la preuve | 41 |
| 4.1.3 | Reformulation sur la base E_1 | 45 |
| 4.1.4 | Le cas $r = 0$ | 49 |
| 4.2 | Dévissages | 50 |
| 5 | Calcul de la cohomologie étale | 52 |
| 5.1 | Les faisceaux \mathcal{S}_n^s | 53 |
| 5.2 | La preuve | 53 |
| 5.2.1 | Le foncteur j_\star | 54 |
| 5.2.2 | Le calcul de $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ | 54 |
| 5.2.3 | Le calcul de $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ | 55 |
| 5.2.4 | Le calcul de $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$ | 56 |
| 5.2.5 | Le cas $r = 0$ | 57 |
| 5.3 | Une conjecture de Serre | 58 |

1 Introduction

Tout au long de cet article, on considère p un nombre premier et k un corps parfait de caractéristique p . On note $W = W(k)$ l’anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et K_0 son corps des fractions. On note σ le Frobenius sur k , sur W et sur K_0 . On considère K une extension totalement ramifiée de K_0 de degré e . On fixe π une uniformisante de K et on note $E(u)$ son polynôme minimal sur K_0 . Il s’agit d’un polynôme d’Eisenstein. On note de plus \mathcal{O}_K l’anneau des entiers de K . Le corps résiduel \mathcal{O}_K/π s’identifie à k .

On fixe \bar{K} (resp. \bar{k}) une clôture algébrique de K (resp. de k) et on définit G_K (resp. G_k) comme le groupe de Galois absolu de K (resp. de k). On désigne par K^{nr} (resp. K^{mr}) l’extension maximale non ramifiée (resp. modérément ramifiée) de K et par I (resp. I_s) le groupe d’inertie (resp. d’inertie sauvage), c’est-à-dire le groupe de Galois de \bar{K} sur K^{nr} (resp. sur K^{mr}). Le quotient $I_t = I/I_s$ est le groupe d’inertie modérée.

Le but de cet article est de comparer, lorsque X est un schéma propre et semi-stable sur \mathcal{O}_K , la cohomologie log-cristalline (définie par Kato — voir [Kat89]) de la fibre spéciale de X et la cohomologie étale de $X_{\bar{K}} = X \times_{\mathcal{O}_K} \bar{K}$. Ces théorèmes de comparaison s’inscrivent dans une grande lignée amorcée par Grothendieck, Tate et Raynaud et poursuivie par Fontaine, Messing, Faltings, Kato, Tsuji, Breuil... Nous nous intéressons particulièrement aux cas des coefficients de torsion. Précisément nous étendons les résultats de [Bre98] et obtenons le théorème :

Théorème 1.1. *On garde les notations précédentes et on fixe r un entier vérifiant $er < p - 1$. Si $X_n = X \times_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p^n$, on a un isomorphisme canonique de modules galoisiens :*

$$H_{\text{ét}}^i(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})(r) = T_{\text{st}\star}(H_{\text{log-cris}}^i(X_n/(S/p^n S)))$$

pour tout $i < r$ (et aussi $i = r$ si $n = 1$).

Dans ce théorème S et $T_{\text{st}\star}$ désignent respectivement une certaine W -algèbre, et un certain foncteur d'une catégorie de S -modules de torsion avec structures additionnelles $\underline{\mathcal{M}}^r$ vers la catégorie des \mathbb{Z}_p -représentations galoisiennes, tous deux introduits par Breuil dans [Bre97a] (pour le cas $e = 1$) et [Bre99] (pour le cas général), et étudiés dans [Car06].

Comme conséquence du théorème 1.1 et des résultats de [Car06], nous donnons une réponse affirmative à une question formulée par Serre dans le paragraphe 1.13 de [Ser72] :

Théorème 1.2. *On garde les notations précédentes et on fixe r un entier quelconque. Soient V la restriction au groupe d'inertie I de la \mathbb{F}_p -représentation $H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee$ (où « \vee » signifie que l'on prend le \mathbb{F}_p -dual) et V^{ss} la semi-simplifiée de V . Alors les poids de l'inertie modérée sur V^{ss} sont tous compris entre 0 et er .*

Cet article s'articule comme suit. Les deux chapitres qui suivent cette introduction se bornent à présenter les principaux objets : le chapitre 2 est consacré aux objets d'algèbre linéaire (l'anneau S , les catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et les foncteurs T_{st}^* et $T_{\text{st}\star}$), alors que le chapitre 3 plus géométrique introduit le site log-syntomique et les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_n^{[s]}$, ainsi que certaines variantes, qui s'avèreront cruciaux pour la preuve du théorème 1.1.

Dans le chapitre 4, on prouve que le groupe de cohomologie $H_{\text{log-cris}}^r(X_n/(S/p^n S))$ peut être muni de structures supplémentaires qui en font un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ (auquel on peut alors appliquer le foncteur $T_{\text{st}\star}$). La démonstration se découpe en deux parties : en premier lieu, on montre le résultat lorsque $n = 1$, puis on l'étend à tout n par un dévissage.

Finalement, dans le chapitre 5, on étudie la cohomologie étale et on prouve le théorème 1.1, d'où on déduit directement le théorème 1.2.

Ce travail a été accompli dans le cadre de ma thèse de doctorat en mathématique que j'ai préparée sous la direction de Christophe Breuil. Je tiens à le remercier vivement ici pour les conseils, les explications et les réponses qu'il a toujours su me fournir.

Je remercie également *très* chaleureusement le referee qui a eu le courage et la patience de décrypter et de corriger une première version de ce texte, et qui m'a proposé une méthode alternative pour mener à bien plus rapidement — et également de façon plus correcte — les calculs locaux en topologie log-syntomique. Une partie importante de la section 3, ainsi que le début de la section 4 ont été réécrits suite à son rapport.

2 Les objets d'algèbre linéaire

2.1 La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$

On reprend les notations du début de l'introduction et on fixe dans tout ce chapitre un entier r positif ou nul vérifiant l'inégalité $er < p - 1$. On rappelle que e désigne le degré de l'extension K/K_0 , c'est-à-dire l'indice de ramification absolue de K .

2.1.1 L'anneau S

Soit $W[u]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée u à coefficients dans W . Par définition, S est le complété p -adique de l'enveloppe à puissances divisées de $W[u]$ par rapport à l'idéal principal engendré par $E(u)$ compatibles aux puissances divisées canoniques sur $pW[u]$. Concrètement, S est la sous- W -algèbre de $K_0[[u]]$ suivante :

$$S = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{q(i)!}, w_i \in W, w_i \rightarrow 0 \text{ } p\text{-adiquement} \right\}$$

où $q(i)$ désigne le quotient de la division euclidienne de i par e . L'anneau S est local et son idéal maximal s'identifie aux sommes formelles pour lesquelles w_0 n'est pas inversible dans W .

On munit S d'un Frobenius ϕ défini comme l'unique application continue σ -semi-linéaire vérifiant $\phi(u^i/q(i)!) = u^{pi}/q(i)!$ et d'un opérateur de monodromie N défini comme l'unique application continue W -linéaire vérifiant $N(u^i/q(i)!) = -iu^i/q(i)!$. On munit également S d'une filtration : pour tout entier positif ou nul n , on définit $\text{Fil}^n S$ comme l'adhérence (pour la topologie p -adique) de l'idéal engendré par les éléments $\frac{(E(u))^i}{i!}$ pour $i \geq n$. On a $\text{Fil}^0 S = S$, $\text{Fil}^n S \subset \text{Fil}^{n-1} S$, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Fil}^n S = 0$, et certaines compatibilités vis-à-vis des opérateurs à savoir $N(\text{Fil}^n S) \subset \text{Fil}^{n-1} S$ et, pour $0 \leq n \leq p-1$, $\phi(\text{Fil}^n S) \subset p^n S$. Cela permet de définir, pour $0 \leq n \leq p-1$, l'application $\phi_n = \frac{\phi}{p^n} : \text{Fil}^n S \rightarrow S$. L'élément $\phi_1(E(u))$ est une unité de S , on le notera c par la suite.

On note $S_n = S/p^n S$. Le Frobenius, l'opérateur de monodromie et la filtration passent au quotient et définissent des structures analogues sur S_n .

2.1.2 Définition des catégories

Par définition, un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est la donnée :

1. d'un S -module \mathcal{M} isomorphe à une somme directe finie de S_n pour des entiers n convenables ;
2. d'un sous-module $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} contenant $\text{Fil}^r S \cdot \mathcal{M}$;
3. d'une flèche ϕ -semi-linéaire $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ vérifiant la condition :

$$\phi_r(sx) = \frac{1}{c^r} \phi_r(s) \phi_r((E(u))^r x)$$

pour tout élément $s \in \text{Fil}^r S$ et tout élément $x \in \mathcal{M}$ et telle que $\text{im } \phi_r$ engendre \mathcal{M} en tant que S -module ;

4. d'une application W -linéaire $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que :
 - pour tout $s \in S$ et tout $x \in \mathcal{M}$, $N(sx) = N(s)x + sN(x)$
 - $E(u)N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ E(u)N \downarrow & & \downarrow cN \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Une flèche entre deux objets \mathcal{M} et \mathcal{M}' de cette catégorie est un morphisme S -linéaire de \mathcal{M} dans \mathcal{M}' respectant la filtration et commutant aux applications ϕ_r et N .

Nous renvoyons à [Car06] pour l'étude de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. Il y est prouvé en particulier que $\underline{\mathcal{M}}^r$ est une catégorie abélienne et artinienne.

2.2 Les objets tués par p

Nous nous intéressons à présent à la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^r$ formée des objets tués par p , que nous notons $\underline{\mathcal{M}}^{r,p}$. Elle est équivalente à une catégorie d'objets sur $k[u]/u^{ep}$ plus simple à manipuler que les objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (voir [Car06]). Cependant, nous aurons besoin d'une description encore différente utilisant des objets sur $k[u]/u^p$, et c'est celle-ci que nous allons détailler maintenant.

On commence par rappeler le résultat suivant :

Lemme 2.2.1. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,p}$. Alors l'application :*

$$S_1 \otimes_{k[u]/u^e} \text{Fil}^r \mathcal{M} / (E(u) \text{Fil}^r \mathcal{M} + \text{Fil}^p S \mathcal{M}) \xrightarrow{id \otimes \phi_r} \mathcal{M}$$

est un isomorphisme (où S_1 est vu comme un $k[u]/u^e$ -module via le Frobenius $\phi : u^i \mapsto u^{pi}$).

Démonstration. Le lemme découle des propositions 3.2.1 et 3.2.3 de [Car06], ainsi que de la description du quasi-inverse du foncteur T de la proposition 2.3.1 de *loc. cit.*, quasi-inverse explicite dans la preuve de la proposition 2.2.2.1 de [Bre97a]. \square

2.2.1 La catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$

Soit $\tilde{S} = k[u]/u^p$. On munit \tilde{S} d'un Frobenius ϕ , unique application σ -semi-linéaire vérifiant $\phi(u^i) = u^{ip}$, et d'un opérateur de monodromie N , unique application k -linéaire vérifiant $N(u^i) = -iu^i$. On définit également une filtration sur \tilde{S} en posant pour tout entier n , $\text{Fil}^n \tilde{S} = u^{en} \tilde{S}$. On dispose d'un morphisme d'anneaux $S_1 \rightarrow \tilde{S}$ qui envoie u sur u et toutes les puissances divisées $u^i/q(i)!$ sur 0 pour $i \geq p$. Ce morphisme est compatible à ϕ_r , N et envoie $\text{Fil}^n S_1$ sur $\text{Fil}^n \tilde{S}$.

On définit la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ en adaptant la définition de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. Un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ est la donnée suivante :

1. un \tilde{S} -module $\tilde{\mathcal{M}}$ libre de rang fini ;
2. un sous-module $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ de $\tilde{\mathcal{M}}$ contenant $\text{Fil}^r \tilde{S} \cdot \tilde{\mathcal{M}} = u^{er} \tilde{\mathcal{M}}$;
3. une flèche ϕ -semi-linéaire $\phi_r : \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ telle que l'image de ϕ_r engendre $\tilde{\mathcal{M}}$ en tant que \tilde{S} -module¹ ;
4. une application k -linéaire $N : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ telle que :
 - pour tout $\lambda \in \tilde{S}$ et tout $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)x + \lambda N(x)$
 - $u^e N(\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}) \subset \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$

¹On n'a pas besoin de demander la condition supplémentaire sur ϕ_r comme c'était le cas pour $\underline{\mathcal{M}}^r$ car elle est automatique étant donné que $\text{Fil}^r \tilde{S}$ est engendré par $E(u)^r = u^{er}$.

– le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\phi_r} & \tilde{\mathcal{M}} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow c_\pi N \\ \mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\phi_r} & \tilde{\mathcal{M}} \end{array}$$

où c_π est la réduction de c dans \tilde{S} .

Les morphismes entre deux objets de $\tilde{\mathcal{M}}$ sont les applications \tilde{S} -linéaires qui respectent le Fil^r , commutent au Frobenius et à l'opérateur de monodromie.

On a encore dans un contexte un énoncé analogue au lemme 2.2.1, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Lemme 2.2.2. *Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ un objet de $\tilde{\mathcal{M}}$. Alors l'application :*

$$\tilde{S} \otimes_k \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} / u \mathrm{Fil}^r \mathcal{M} \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \phi_r} \mathcal{M}$$

est un isomorphisme (où \tilde{S} est vu comme un k -espace vectoriel via le Frobenius).

On dispose d'un foncteur $T : \underline{\mathcal{M}}^{r,p} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}^r$ défini de la façon suivante : si \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p , c'est en particulier un S_1 -module libre de rang fini et on lui associe $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes_{S_1} \tilde{S}$. On définit $\mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ comme l'image de $\mathrm{Fil}^r \mathcal{M}$ par la projection canonique $\mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$, et on vérifie facilement que les opérateurs ϕ_r et N définis sur \mathcal{M} passent au quotient pour fournir respectivement des opérateurs $\mathrm{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ et $\tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ encore notés ϕ_r et N .

La proposition suivante permet de réduire l'étude de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ à celle de la catégorie $\tilde{\mathcal{M}}^r$ et à des dévissages.

Proposition 2.2.3. *Le foncteur T est une équivalence de catégories*

Cette proposition est prouvée dans [Bre97a] (proposition 2.2.2.1) lorsque $e = 1$. La démonstration repose sur la construction d'un quasi-inverse donné par une formule explicite. Cependant, lorsque $e > 1$, ce que nous supposons par la suite, cette formule n'a plus de sens et pour adapter la preuve de Breuil, on a besoin de procéder en plusieurs étapes en introduisant des catégories intermédiaires. C'est l'objet des deux paragraphes suivants qui prennent fin avec une preuve complète de la proposition 2.2.3.

2.2.2 Le cas $r > 0$: la catégorie $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$

On traite ici le cas $r > 0$. Il pourrait paraître plus difficile mais il a l'avantage d'imposer l'inégalité $e < p - 1$ (puisque l'on suppose toujours $er < p - 1$) qui simplifie quelque peu la tâche. En particulier, nous n'aurons besoin d'utiliser qu'une seule catégorie intermédiaire que nous définissons tout de suite. Soit $\tilde{S}_{(2)} = k[u]/u^{2p}$. C'est un anneau muni d'un Frobenius ϕ semi-linéaire envoyant u^i sur u^{pi} , d'un opérateur de monodromie N k -linéaire envoyant u^i sur $-iu^i$, et de morphismes surjectifs $S_1 \rightarrow \tilde{S}_{(2)} \rightarrow \tilde{S}$ compatibles à toutes les structures. Un objet de $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ est la donnée de :

1. un $\tilde{S}_{(2)}$ -module $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ libre de rang fini ;

2. un sous-module $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ de $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ contenant $u^{er} \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$;
3. une flèche ϕ -semi-linéaire $\phi_r : \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ telle que l'image de ϕ_r engendre $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ en tant que $\tilde{S}_{(2)}$ -module ;
4. une application k -linéaire $N : \tilde{\mathcal{M}}_{(2)} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ telle que :
 - pour tout $\lambda \in \tilde{S}_{(2)}$ et tout $x \in \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$, $N(\lambda x) = N(\lambda)x + \lambda N(x)$
 - $u^e N(\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}) \subset \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$
 - le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)} & \xrightarrow{\phi_r} & \tilde{\mathcal{M}}_{(2)} \\ u^e N \downarrow & & \downarrow c_{(2),\pi} N \\ \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)} & \xrightarrow{\phi_r} & \tilde{\mathcal{M}}_{(2)} \end{array}$$

où $c_{(2),\pi}$ est la réduction de c dans $\tilde{S}_{(2)}$.

Les morphismes de $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ sont les applications $\tilde{S}_{(2)}$ -linéaires qui commutent à toutes les structures.

À nouveau, on dispose d'un énoncé analogue au lemme 2.2.1 :

Lemme 2.2.4. *Soit $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ un objet de $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$. Alors l'application :*

$$\tilde{S}_{(2)} \otimes_{k[u]/u^2} \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)} / u^2 \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)} \xrightarrow{id \otimes \phi_r} \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$$

est un isomorphisme (où $\tilde{S}_{(2)}$ est vu comme un $k[u]/u^2$ -espace vectoriel via le Frobenius).

Les catégories $\underline{\mathcal{M}}^{r,p}$, $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ et $\tilde{\mathcal{M}}^r$ sont reliées par les foncteurs $T_1 : \underline{\mathcal{M}}^{r,p} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ et $T_2 : \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}^r$ définis par :

$$\begin{aligned} T_1(\mathcal{M}) &= \mathcal{M} / (u^{2p} \mathcal{M} + \text{Fil}^p S\mathcal{M}) \\ T_2(\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r) &= \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r / u^p \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r \end{aligned}$$

les structures additionnelles passant au quotient. Le foncteur T s'écrit comme la composée $T_2 \circ T_1$. Ainsi la proposition 2.2.3 résulte directement de la suivante :

Proposition 2.2.5. *Les foncteurs T_1 et T_2 sont des équivalences de catégories.*

Démonstration. Puisque $r > 0$, l'inégalité $er < p - 1$ entraîne $er \leq 2p - e$ d'où on déduit que si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,p}$, alors :

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} / (u^e \text{Fil}^r \mathcal{M} + \text{Fil}^p S\mathcal{M}) \simeq \text{Fil}^r T_1(\mathcal{M}) / u^e \text{Fil}^r T_1(\mathcal{M})$$

où le morphisme est induit par la projection canonique $\mathcal{M} \rightarrow T_1(\mathcal{M})$. De même, encore en vertu de l'inégalité $er < p - 1$, on a pour tout objet $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ de $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$, l'identification :

$$\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r / u^2 \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r \simeq \text{Fil}^r T_2(\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r) / u^2 \text{Fil}^r T_2(\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r).$$

Sachant ceci, il devient possible de recopier deux fois la démonstration de la proposition 2.2.2.1 de [Bre97a]. Plus précisément, un quasi-inverse de T_2 est donné, pour $\tilde{\mathcal{M}} \in \widetilde{\mathcal{M}}^r$, par la formule :

$$T_2^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) = \tilde{S}_{(2)} \otimes_{k[u]/u^2} \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} / u^2 \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$$

où $\tilde{S}_{(2)}$ est vu sur $k[u]/u^2$ par le Frobenius et où les structures additionnelles sont définies comme suit. La projection canonique $\tilde{S}_{(2)} \rightarrow \tilde{S}$ induit un morphisme surjectif $f : T_2^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$. On définit $\text{Fil}^r T_2^{-1}(\tilde{\mathcal{M}})$ comme l'image réciproque de $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ par f . Si $x \in \text{Fil}^r T_2^{-1}(\tilde{\mathcal{M}})$, $f(x)$ définit par réduction modulo $u^2 \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ un élément $y \in \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} / u^2 \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ et on pose $\phi_r(x) = 1 \otimes y$. Finalement, $u^e N$ induit un endomorphisme g de $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} / u^2 \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ et on définit l'opérateur N par la formule :

$$N(s \otimes x) = N(s) \otimes x + \frac{s}{c_{(2),\pi}} \otimes g(x)$$

pour $s \in \tilde{S}_{(2)}$ et $x \in \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} / u^2 \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$. De même, le quasi-inverse de T_1 est donné par :

$$T_1^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}) = S_1 \otimes_{k[u]/u^e} \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)} / u^e \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$$

où les structures additionnelles sont définies de manière analogue. \square

2.2.3 Le cas $r = 0$

Lorsque $r = 0$, l'idée de la preuve est absolument similaire sauf que l'on ne peut alors plus « sauter » directement de $\widetilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ à $\mathcal{M}^{r,p}$ mais que l'on a besoin de tremplins supplémentaires. Exactement, on définit pour tout entier $n \leq e$, l'anneau $\tilde{S}_{(n)} = k[u]/u^{np}$ et la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(n)}^r$ de manière analogue à ce qui a été fait dans le paragraphe précédent. Pour des entiers $n \leq n' \leq e$, on dispose d'un foncteur $T_{n,n'} : \widetilde{\mathcal{M}}_{(n)}^r \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_{(n')}^r$ qui effectue la réduction modulo $u^{n'p}$. Ils vérifient la relation $T_{n,n''} = T_{n',n''} \circ T_{n,n'}$.

Du fait que l'on dispose encore bien sûr de l'isomorphisme :

$$\tilde{S}_{(n)} \otimes_{k[u]/u^n} \text{Fil}^r \mathcal{M}_{(n)} / u^n \text{Fil}^r \mathcal{M}_{(n)} \xrightarrow{\text{id} \otimes \phi_r} \mathcal{M}_{(n)}$$

valable pour tout objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_{(n)}^r$, une démonstration analogue à celle de la proposition 2.2.5 assure que les fonction $T_{n+1,n}$ sont des équivalences de catégories. Il en est ainsi de même de tous les $T_{n',n}$ et en particulier de $T_{e,1}$. La preuve de la proposition 2.2.5 assure également que les catégories $\mathcal{M}^{r,p}$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{(e)}^r$ sont équivalentes. Ainsi le foncteur T dont il est question dans la proposition est bien une équivalence.

En réalité, le cas $r = 0$ est bien plus favorable, principalement pour deux raisons : d'une part, il suffit de considérer des « objets modulo u » et d'autre part, il est possible de donner une formule close pour un quasi-inverse de T , formule qui en outre se généralise aux objets non nécessairement annulés par p . Pour cela, notons κ le noyau de la projection canonique $S \rightarrow W$ (qui envoie u et toutes ses puissances divisées supérieures sur 0). Ainsi κ est l'adhérence de l'idéal de S engendré par les $\frac{u^i}{q(i)!}$, $i \geq 1$.

Lemme 2.2.6. *Soit $n \geq 1$. Il existe un entier M_n tel que $\phi \circ \dots \circ \phi$ (M_n fois) s'annule sur κS_n .*

Démonstration. Pour un entier $M \geq 1$, notons $\phi^M = \phi \circ \dots \circ \phi$ (M fois) et calculons, pour $i \geq 1$:

$$\phi^M \left(\frac{u^i}{q(i)!} \right) = \frac{u^{ip^M}}{q(i)!} = \frac{q(ip^M)!}{q(i)!} \cdot \frac{u^{ip^M}}{q(ip^M)!}.$$

Il suffit de montrer que pour M suffisamment grand, le quotient $\frac{q(ip^M)!}{q(i)!}$ est multiple de p^n . Or si v_p désigne la valuation p -adique normalisée par $v_p(p) = 1$, on a l'encadrement $\frac{k}{p} - 1 \leq v_p(k!) \leq \frac{k}{p-1}$ pour tout k , d'où on tire :

$$v_p \left(\frac{q(ip^M)!}{q(i)!} \right) \geq i \left(\frac{p^{M-1}}{e} - \frac{1}{e(p-1)} \right) - \frac{p+1}{p} \geq \frac{p^{M-1}}{e} - \frac{1}{e(p-1)} - \frac{p+1}{p}$$

On conclut en remarquant que ce dernier minorant ne dépend pas de i et tend vers $+\infty$ quand M grandit. \square

Remarque. Évidemment, on peut choisir les entiers précédents de telle sorte que l'application $n \mapsto M_n$ soit croissante. C'est ce que nous ferons par la suite.

Nous poursuivons par un second lemme, analogue dans cette nouvelle situation du lemme 2.2.1 :

Lemme 2.2.7. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^0$ et n un entier tel que $p^n \mathcal{M} = 0$. Alors pour $M \geq M_n$ (voir lemme 2.2.6) l'application :*

$$S \otimes_{(\phi^M), W} \mathcal{M} / \kappa \mathcal{M} \xrightarrow{\text{id} \otimes \phi_0^M} \mathcal{M}$$

est bien définie et un isomorphisme.

Démonstration. Commençons par souligner que comme $r = 0$, on a nécessairement $\text{Fil}^0 \mathcal{M} = \mathcal{M}$ et donc il est légitime d'appliquer ϕ_0 à un élément de \mathcal{M} . Le fait que l'application soit bien définie résulte directement du lemme 2.2.6, alors que le fait qu'elle soit surjective résulte de l'hypothèse selon laquelle $\phi_0(\mathcal{M})$ engendre \mathcal{M} . Il ne reste plus qu'à prouver qu'elle est injective.

Pour cela, on fait une récurrence sur la plus petite puissance de p qui annule \mathcal{M} . Si \mathcal{M} est tué par p , $\text{id} \otimes \phi_0^M$ est une application S_1 -linéaire surjective entre deux S_1 -modules libres de même rang. Elle est alors nécessairement injective. Sinon on introduit les objets $\mathcal{M}' = p\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}/p\mathcal{M}$. Ils s'insèrent dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} S \otimes_{(\phi^M), W} \mathcal{M}' / \kappa \mathcal{M}' & \longrightarrow & S \otimes_{(\phi^M), W} \mathcal{M} / \kappa \mathcal{M} & \longrightarrow & S \otimes_{(\phi^M), W} \mathcal{M}'' / \kappa \mathcal{M}'' & \longrightarrow & 0 \\ \sim \downarrow \text{id} \otimes \phi_0^M & & \downarrow \text{id} \otimes \phi_0^M & & \sim \downarrow \text{id} \otimes \phi_0^M & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{M}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes. Les flèches verticales de gauche et de droite sont des isomorphismes par hypothèse de récurrence. Une chasse au diagramme facile implique alors que la flèche du milieu est injective, comme voulu. \square

Proposition 2.2.8. *Le foncteur T qui à \mathcal{M} associe $\mathcal{M} / \kappa \mathcal{M}$ induit une équivalence de catégories entre $\underline{\mathcal{M}}^0$ et la catégorie des W -modules de torsion de type fini munis d'un automorphisme semi-linéaire par rapport au Frobenius de W .*

Démonstration. Par un argument semblable à celui utilisé dans la deuxième partie de la preuve du lemme 2.2.7, on montre que pour tout $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^0$, le morphisme ϕ_0 induit un isomorphisme sur le quotient $\mathcal{M} / \kappa \mathcal{M}$. Le foncteur T précédent est donc bien défini.

Pour prouver que c'est une équivalence, on exhibe un quasi-inverse. Il est défini comme suit. Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ un W -module de torsion de type fini muni d'un automorphisme ϕ_0 semi-linéaire par rapport au Frobenius. Pour un entier M quelconque (par exemple égal à 0), on pose :

$$T^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) = S \otimes_{(\phi^M), W} \tilde{\mathcal{M}}$$

muni de $\text{Fil}^0 T^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) = T^{-1}(\tilde{\mathcal{M}})$, de $\phi_0 = \phi \otimes \phi_0$ et de $N = N \otimes \text{id}$. Les applications $S \otimes_{(\phi^{M+1}), W} \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow S \otimes_{(\phi^M), W} \tilde{\mathcal{M}}$, $s \otimes x \mapsto s \otimes \phi_0(x)$ sont des isomorphismes (respectant les structures additionnelles) et montrent que la définition de T^{-1} ne dépend effectivement pas d'un choix de M . D'autre part, on a directement $T \circ T^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) \simeq \tilde{\mathcal{M}}$.

Pour conclure, il suffit de montrer que pour tout $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^0$, on a un isomorphisme fonctoriel entre $T^{-1} \circ T(\mathcal{M})$ et \mathcal{M} dans la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^0$. Il est bien sûr donné par le lemme 2.2.7 lorsque M est choisi suffisamment grand. Il reste à vérifier les compatibilités. Il est clair qu'il est S -linéaire, (qu'il respecte le Fil^0) et qu'il commute à ϕ_0 . Il ne reste plus à prouver qu'il est compatible à N . Pour cela, on considère $s \in S$, $x \in \mathcal{M}$ et on calcule :

$$N \circ (\text{id} \otimes \phi_0^M)(s \otimes x) = N(s\phi_0^M(x)) = N(s)\phi_0^M(x) + sN(\phi_0^M(x)) = N(s)\phi_0^M(x) + p^M s\phi_0(N(x)).$$

Si l'on choisit M suffisamment grand pour que $p^M \mathcal{M} = 0$, le dernier terme s'annule et la quantité calculée vaut $N(s)\phi_0^M(x) = (\text{id} \otimes \phi_0^M)(N(s) \otimes x)$, ce qui termine la vérification. \square

Remarque. La catégorie qui apparaît dans la proposition précédente n'est pas nouvelle, et est même une des premières à avoir été introduite pour l'étude des représentations galoisiennes p -adiques. Pour de nombreux compléments à son sujet, on pourra par exemple se reporter au début de [Fon91].

Si A est un module muni d'un endomorphisme φ , on note $\varphi^M(A)$ l'image de A par le M -ième itéré de φ et :

$$\varphi^\infty(A) = \bigcap_{M \geq 0} \varphi^M(A). \quad (1)$$

Avec cette notation, l'équivalence de catégories que nous venons d'établir admet pour corollaire l'énoncé suivant :

Proposition 2.2.9. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^0$. L'application de réduction modulo κ induit un isomorphisme $\phi_0^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow T(\mathcal{M})$ compatible à l'action de ϕ_0 . De plus l'opérateur N est nul sur $\phi_0^\infty(\mathcal{M})$.*

2.3 Foncteurs vers les représentations galoisiennes

Il existe deux versions du foncteur vers les représentations galoisiennes. La première, que nous notons $T_{\text{st}, \star}$, est covariante et la seconde, T_{st}^* , est contravariante. Nous sommes dans l'obligation de présenter ici les deux foncteurs et d'établir les liens qui les relient, car pour ce que nous voulons faire, il sera plus commode d'utiliser la version covariante, mais nous aurons également besoin d'utiliser les résultats de [Car06] où seulement la version contravariante est présentée et étudiée.

2.3.1 Un anneau de périodes

Avant de pouvoir définir ces foncteurs, il faut rappeler la définition de l'anneau de périodes \hat{A}_{st} , introduit par Kato dans [Kat94] et ainsi nommé par Breuil dans [Bre97a], paragraphe 3.1.1. Cet anneau a une interprétation cohomologique que nous passons sous silence pour l'instant.

Pour tout entier n , on considère l'application :

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n & : W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n \\ (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) & \mapsto \hat{a}_0^{p^n} + p\hat{a}_1^{p^{n-1}} + \dots + p^{n-1}\hat{a}_{n-1}^p \end{aligned}$$

où $\hat{a}_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n$ est un relevé quelconque de a_i . On note $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)^{\text{DP}}$ l'enveloppe à puissances divisées de $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$ par rapport à $\ker \hat{\theta}_n$ (et compatibles avec les puissances divisées canoniques sur $pW_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$). Les $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)^{\text{DP}}$ forment un système projectif pour les applications de transition données par le Frobenius sur les vecteurs de Witt. On note A_{cris} la limite projective de ce système. On voit facilement que le Frobenius sur les vecteurs de Witt induit une application $\phi : A_{\text{cris}} \rightarrow A_{\text{cris}}$. En outre, on définit sur A_{cris} une filtration obtenue à partir des filtrations à puissances divisées sur $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)^{\text{DP}}$. Si $t < 0$, on pose par convention $\text{Fil}^t A_{\text{cris}} = A_{\text{cris}}$. Par ailleurs, A_{cris} est muni d'une action du groupe de Galois G_K .

Par définition \hat{A}_{st} est le complété p -adique de $A_{\text{cris}} \langle X \rangle$. On munit \hat{A}_{st} d'une filtration en posant :

$$\text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{X^i}{i!}, \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0, a_i \in \text{Fil}^{t-i} A_{\text{cris}} \right\}$$

pour tout entier t . On étend le Frobenius à \hat{A}_{st} en imposant $\phi(X) = (1+X)^p - 1$. On vérifie que, pour $0 \leq t < p-1$, $\phi(\text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}}) \subset p^t \hat{A}_{\text{st}}$, ce qui permet de définir une application $\phi_t = \phi/p^t : \text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$. D'autre part, on définit sur \hat{A}_{st} une dérivation A_{cris} -linéaire, par la formule :

$$N \left(\frac{X^i}{i!} \right) = (1+X) \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Les opérateurs ϕ et N sont soumis à la relation $N\phi = p\phi N$. On étend également l'action de G_K à tout \hat{A}_{st} . Pour cela, on commence par fixer² $\underline{\pi} = (\pi_n)$ un système compatible de racines p^n -ièmes de π . Soit $g \in G_K$. On définit $\varepsilon_n(g)$ comme l'unique élément de $\mathcal{O}_{\bar{K}}$ vérifiant $g(\pi_n) = \varepsilon_n(g)\pi_n$. La famille des $(\varepsilon_n(g))$ forme un système compatible de racines p^n -ièmes de l'unité et par suite un élément $[\varepsilon(g)] \in A_{\text{cris}}$ obtenu à partir des représentants de Teichmüller $[\varepsilon_n(g)] \in W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p)$. L'action de g sur X est alors donnée par la formule $g(X) = [\varepsilon(g)](1+X) - 1$. On étend cette action par continuité et semi-linéarité à tout \hat{A}_{st} avant de vérifier qu'elle commute encore à ϕ et N .

L'anneau S n'est pas sans rapport avec \hat{A}_{st} . Si l'on note $[\underline{\pi}]$ l'élément de \hat{A}_{st} défini à partir du système (π_n) fixé précédemment, \hat{A}_{st} peut être vu comme une S -algèbre *via* l'unique morphisme W -linéaire $S \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}$ qui envoie u sur $\frac{[\underline{\pi}]}{1+X}$. Ce morphisme est injectif, compatible à ϕ et N et identifie S aux invariants de \hat{A}_{st} sous l'action du groupe G_K (voir paragraphe 4.2 de [Bre97b]).

2.3.2 La version contravariante

Nous commençons par la version contravariante qui est plus simple à définir. Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On pose :

$$T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) = \text{Hom}(\mathcal{M}, \hat{A}_{\text{st}, \infty})$$

²Ainsi \hat{A}_{st} dépend *a priori* de ce choix (en réalité, c'est l'élément X dans l'identification $\hat{A}_{\text{st}} = A_{\text{cris}} \langle X \rangle$ qui en dépend). Cependant, on peut montrer qu'il n'en dépend pas à isomorphisme canonique près.

où par définition $\hat{A}_{\text{st},\infty} = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0/W$ et où le Hom précédent signifie que l'on ne considère que les morphismes \tilde{S} -linéaires, compatibles à Fil^r , ϕ_r et N . L'objet $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ est un \mathbb{Z}_p -module de torsion de type fini (voir [Bre97a] pour le cas $e = 1$ et [Car06] pour le cas général) qui hérite d'une action de G_K . On a donc ainsi bien défini un foncteur de $\underline{\mathcal{M}}^r$ dans la catégorie des \mathbb{Z}_p -représentations de torsion du groupe G_K .

Ce foncteur est étudié en détail dans [Bre97a] (pour le cas $e = 1$) et dans [Car06]. Le théorème suivant résume ses propriétés :

Théorème 2.3.1. *Le foncteur T_{st}^* est exact, pleinement fidèle, d'image essentielle stable par quotients et par sous-objets. De plus, si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S -module à $S_{n_1} \oplus \dots \oplus S_{n_d}$, alors la représentation galoisienne $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ est isomorphe en tant que \mathbb{Z}_p -module à $\mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p^{n_d}\mathbb{Z}$.*

On dispose en outre d'une description plus simple du foncteur T_{st}^* pour les objets tués par p . Considérons pour cela l'anneau $\tilde{A} = \hat{A}_{\text{st}}/p \otimes_{S_1} \tilde{S}$. L'application $W_2(\mathcal{O}_{\bar{K}}/p) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$, $(a_0, a_1) \mapsto a_0^p$ (et pas $a_0^{p^2}$!) induit une application $A_{\text{cris}} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p$ puis un morphisme $\hat{A}_{\text{st}}/p \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p \langle X \rangle$. Le produit tensoriel de ce dernier avec $\tilde{S} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi \langle X \rangle$, $u \mapsto \frac{\pi_1}{1+X}$ induit une identification entre \tilde{A} et $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi) \langle X \rangle$ (voir lemme 2.3.3 de [Car06]). D'après ce même lemme, il est possible de décrire les structures supplémentaires sur $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi) \langle X \rangle$. Exactement, $\text{Fil}^t(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi) \langle X \rangle$ est l'idéal engendré par les $\pi_1^{e(t-i)} \frac{X^i}{i!}$ pour $i \leq t$ et par les $\frac{X^i}{i!}$ pour $i > t$. La monodromie est l'unique opérateur $(\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi)$ -linéaire envoyant $\frac{X^i}{i!}$ sur $(1+X) \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$. Il faut toutefois faire attention à ϕ_t car, pour $et < p-1$, si $x \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ est un multiple de π_1^{et} et si \bar{x} désigne la réduction modulo π de x , alors $\phi_t(\bar{x})$ est la réduction modulo π de $(-1)^t \frac{x^p}{p^t}$ (et pas de $\frac{x^p}{p^t}$).

Proposition 2.3.2. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p . Alors :*

$$T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) = \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \tilde{A})$$

où Hom signifie que l'on considère les morphismes \tilde{S} -linéaires commutant à Fil^r , ϕ_r et N .

Démonstration. On suppose d'abord $r > 0$ et on note $\kappa' = \ker(S_1 \rightarrow \tilde{S})$. Pour $i \geq p$, on a par un calcul direct, $\phi_r \circ \phi_r(\frac{u^i}{q(i)!}) = 0$ (dans S_1) et par suite $\phi_r \circ \phi_r(\kappa') = 0$.

La tensorisation par \tilde{S} au-dessus de S_1 fournit un morphisme :

$$T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) \rightarrow \text{Hom}(T(\mathcal{M}), \tilde{A})$$

qui commute à l'action de Galois. Soit $\psi \in T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ qui s'envoie sur 0 par l'application précédemment définie. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\mathcal{M}) & \xrightarrow{0} & \tilde{A} \end{array}$$

où les flèches verticales sont déduites de la projection $S_1 \rightarrow \tilde{S}$. Ainsi $\text{im } \psi \subset \kappa' \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. Or ψ commute par définition à ϕ_r , d'où on déduit $\psi \circ \phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}) = \phi_r \circ \psi(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \phi_r(\kappa') \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. Comme par hypothèse, $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$ engendre \mathcal{M} , il vient $\text{im } \psi \subset \phi_r(\kappa') \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. En appliquant

à nouveau l'argument, et en utilisant $\phi_r \circ \phi_r(\kappa') = 0$, on obtient $\text{im } \psi = 0$ et donc $\psi = 0$. Ceci démontre l'injectivité de la flèche.

Pour la surjectivité, on procède par approximations successives. Soit $\tilde{\psi} : T(\mathcal{M}) \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ un morphisme \tilde{S} -linéaire compatible aux structures. On note $\psi : \mathcal{M} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$ un morphisme S_1 -linéaire faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\tilde{\psi}} & \tilde{\mathcal{A}} \end{array}$$

Dans un premier temps, on vérifie qu'automatiquement ψ respecte le Fil^r et commute à ϕ_r modulo $\kappa'\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. En utilisant le lemme 2.2.1, on montre facilement qu'il existe une unique application S_1 -linéaire ψ_1 faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi} & \text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \\ \phi_r \downarrow & & \downarrow \phi_r \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\psi_1} & \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \end{array}$$

L'application ψ_1 est congrue à ψ modulo $\kappa'\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$, respecte le Fil^r et commute à ϕ_r modulo $\phi_r(\kappa')\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$. De même, à partir de ψ_1 , on construit ψ_2 , qui respecte le Fil^r et commute à ϕ_r sans restriction. Par un argument analogue (voir la fin de la preuve du lemme 6.1.2 de [Car06]), on montre que ψ_2 commute également à N .

Lorsque $r = 0$, on procède pareillement après avoir remarqué que si $\phi_r \circ \phi_r(\kappa')$ ne s'annule pas nécessairement, c'est tout de même le cas pour un itéré $\phi_r^n(\kappa')$ avec $n > 2$. \square

2.3.3 La version covariante

On commence par une définition, déjà présente dans [Bre98] (définition 3.2.1.1) :

Définition 2.3.3. Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ (resp. de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$). On appelle filtration admissible de \mathcal{M} toute filtration décroissante $(\text{Fil}^t \mathcal{M})_{0 \leq t \leq r}$ par des sous- S -modules (resp. des sous- \tilde{S} -modules) vérifiant :

1. $\text{Fil}^0 \mathcal{M} = \mathcal{M}$ et $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ est « le » $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} ;
2. pour tous $0 \leq t \leq t' \leq r$, $\text{Fil}^{t'-t} S \cdot \text{Fil}^t \mathcal{M} \subset \text{Fil}^{t'} \mathcal{M}$ (resp. $\text{Fil}^{t'-t} \tilde{S} \cdot \text{Fil}^t \mathcal{M} \subset \text{Fil}^{t'} \mathcal{M}$) ;
3. pour tout $1 \leq t \leq r$, $N(\text{Fil}^t \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^{t-1} \mathcal{M}$.

Si $(\text{Fil}^t \mathcal{M})_{0 \leq t \leq r}$ est une filtration admissible de \mathcal{M} , on définit des opérateurs $\phi_t : \text{Fil}^t \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ par $\phi_t(x) = c^{t-r} \phi_r(E(u)^{r-t} x)$ de sorte que $\phi_t|_{\text{Fil}^{t+1} \mathcal{M}} = p\phi_{t+1}$ pour $0 \leq t < r$.

Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On considère le produit tensoriel $\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$. Il s'agit d'un \hat{A}_{st} -module naturellement muni d'une action de G_K (en regardant son action sur le premier facteur). On le munit en outre d'un opérateur de monodromie $N : \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M} \rightarrow \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ en posant $N(a \otimes x) = N(a) \otimes x + a \otimes N(x)$.

On considère sur \mathcal{M} une filtration admissible quelconque³. On peut alors définir, pour tout s compris entre 0 et r , $\text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ comme le sous- \hat{A}_{st} -module de $\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ engendré par

³Il en existe toujours : on peut par exemple prendre $\text{Fil}^t \mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} / E(u)^{r-t} x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}\}$.

les images des applications canoniques $\mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes \mathrm{Fil}^{s-t} \mathcal{M} \rightarrow \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ pour t compris entre 0 et s . Ce sous-module dépend de la filtration admissible choisie. Encore suivant [Bre98], on introduit les idéaux de \hat{A}_{st} suivants :

$$\mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}} = \left\{ \sum_{i=t}^m a_i \frac{X^i}{i!}, m \in \mathbb{N}, a_i \in A_{\mathrm{cris}} \right\} \quad (2)$$

et on démontre (comme dans le lemme 3.1.2.1. de [Bre98]) que $\mathrm{Fil}_X^t(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n) = (\mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}})/p^n$ est plat sur S_n et qu'il en est de même des quotients $\mathrm{Fil}_X^t(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n)/\mathrm{Fil}_X^{t+1}(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n)$. Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $(\mathrm{Fil}^t \mathcal{M})$ est une filtration admissible de \mathcal{M} , on définit pour tout s compris entre 0 et r :

$$\mathrm{Fil}_X^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) = \sum_{t=0}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathrm{Fil}^{s-t} \mathcal{M}.$$

On a les deux lemmes suivants :

Lemme 2.3.4. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $(\mathrm{Fil}^t \mathcal{M})$ une filtration admissible de \mathcal{M} . Alors, pour tout s compris entre 0 et r , on a $\mathrm{Fil}_X^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) = \mathrm{Fil}^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ et si $s \geq 1$, on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{t=1}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathrm{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} \longrightarrow \bigoplus_{t=0}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathrm{Fil}^{s-t} \mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Fil}^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

où la première flèche est la somme des applications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathrm{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} & \rightarrow & \mathrm{Fil}_X^{t-1} \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathrm{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} \oplus \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathrm{Fil}^{s-t} \mathcal{M} \\ x_t \otimes y_{s+1-t} & \mapsto & x_t \otimes y_{s+1-t} \oplus -x_t \otimes y_{s+1-t} \end{array}$$

Démonstration. La preuve est une adaptation de celle du lemme 3.2.1.2 de [Bre98]. Pour la première assertion, on a déjà clairement $\mathrm{Fil}_X^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \subset \mathrm{Fil}^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$.

On a une description alternative de A_{cris} (voir [Fon94a]) : si on note $R = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{\bar{K}}/p^n$ pour les applications de transition données par le Frobenius, on peut définir un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\theta} & : & W(R) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \\ (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) & \mapsto & \sum_{n \geq 0} p^n \hat{x}_n^{(n)} \end{array}$$

où \mathbb{C}_p désigne le complété p -adique de \bar{K} et où, si on a posé $a_i = (a_i^{(0)}, \dots, a_i^{(j)}, \dots)$, $\hat{x}_n^{(n)}$ est la limite quand m tend vers l'infini d'une suite $(\hat{a}_n^{(n+m)})p^m$, $\hat{a}_i^{(j)} \in \mathcal{O}_{\bar{K}}$ désignant un relevé quelconque de $a_i^{(j)}$. L'anneau A_{cris} s'identifie alors à l'enveloppe à puissances divisées de $W(R)$ relativement à $\ker \hat{\theta}$ (et compatibles avec les puissances divisées canoniques sur $pW(R)$). On vérifie facilement que $[\pi] \in A_{\mathrm{cris}}$ (défini à la fin du paragraphe 2.3.1) correspond bien au représentant de Teichmüller de π (défini au même endroit). Par ailleurs, on montre (voir [Fon94a]) que $\ker \hat{\theta}$ est un idéal principal, engendré par $E([\pi])$.

Ainsi tout $x \in \mathrm{Fil}^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ s'écrit comme une somme de termes de la forme :

$$a \gamma_j(E([\pi])) \gamma_k(X) \otimes m$$

(où $\gamma_j(x) = \frac{x^j}{j!}$) avec $a \in A_{\mathrm{cris}}$, $m \in \mathrm{Fil}^{s-t} \mathcal{M}$, $0 \leq t \leq s$ et $j+k \geq t$. Mais $[\pi] = u(1+X)$ et donc $E([\pi]) - E(u)$ est un multiple de uX . On peut donc écrire $E([\pi]) = E(u) + uXb$ pour un certain $b \in \hat{A}_{\mathrm{st}}$ puis :

$$\gamma_j(E([\pi])) = \sum_{\ell=0}^j \gamma_{j-\ell}(E(u))(ub)^\ell \gamma_\ell(X).$$

En réinjectant cette expression dans x , on obtient bien $x \in \text{Fil}_X^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$.

Pour la deuxième partie du lemme, la démonstration est exactement la même que celle de [Bre98]. \square

Le précédent lemme permet de définir pour $0 \leq s \leq r$, l'opérateur $\phi_s : \text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \rightarrow \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ comme l'unique application additive vérifiant $\phi_s(a_t \otimes x_t) = \phi_t(a_t) \otimes \phi_{s-t}(x_t)$ pour $a_t \in \text{Fil}^t \hat{A}_{\text{st}}$ et $x_t \in \text{Fil}^{s-t} \mathcal{M}$.

On pose finalement :

$$T_{\text{st}\star}(\mathcal{M}) = \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$$

où la notation signifie que l'on ne retient que les $x \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ pour lesquels $N(x) = 0$ et $\phi_r(x) = x$. On obtient un \mathbb{Z}_p -module galoisien qui dépend *a priori* du choix d'une filtration admissible. Toutefois, nous allons prouver dans la suite que ce n'est pas le cas (voir la remarque faisant suite au corollaire 2.3.8).

Encore une fois, $T_{\text{st}\star}(\mathcal{M})$ a une description plus simple lorsque \mathcal{M} est tué par p . Pour la donner, posons $\tilde{\mathcal{M}} = T(\mathcal{M})$ et notons $\text{pr} : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ la projection canonique. On vérifie facilement que si $(\text{Fil}^t \mathcal{M})$ est une filtration admissible de \mathcal{M} , alors $(\text{pr}(\text{Fil}^t \mathcal{M}))$ est une filtration admissible de $\tilde{\mathcal{M}}$. Le produit tensoriel $\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} \tilde{\mathcal{M}}$ est muni d'un opérateur N défini comme $N \otimes \text{id} + \text{id} \otimes N$ et en recopiant les constructions précédentes, on définit le \tilde{A} -module $\text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} \tilde{\mathcal{M}})$ et une application $\phi_r : \text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} \tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} \tilde{\mathcal{M}}$ en remarquant que le ϕ_r sur $\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ passe au quotient. On s'intéresse au \mathbb{Z}_p -module galoisien suivant :

$$\text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} \tilde{\mathcal{M}})_{N=0}^{\phi_r=1}.$$

Proposition 2.3.5. *Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,p}$ alors :*

$$T_{\text{st}\star}(\mathcal{M}) = \text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}^{\phi_r=1}.$$

Démonstration. Comme dans la preuve de la proposition 2.3.2, on note $\kappa' = \ker(S_1 \rightarrow \tilde{S})$ et on rappelle que lorsque $r > 0$, on a $\phi_r \circ \phi_r(\kappa') = 0$. On suppose maintenant $r > 0$ et on laisse au lecteur le soin d'adapter la preuve pour $r = 0$ (voir dernier alinéa de la preuve *loc. cit.*).

Si \mathcal{M} est tué par p , le \hat{A}_{st} -module $\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$ l'est également. Il s'identifie au $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}}$ -module $\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M}$, et on dispose d'une application canonique :

$$\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M} \rightarrow \tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}).$$

Celle-ci est clairement surjective et son noyau s'identifie à $\kappa'(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. En outre, on vérifie directement qu'elle induit une flèche compatible à l'action de G_K :

$$\Psi : \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1} \rightarrow \text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}^{\phi_r=1}.$$

Reste à prouver que cette dernière est un isomorphisme. Soit $x \in \ker \Psi$. On a $x \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$ et donc $\phi_r(x) = x$. Par ailleurs, de $x \in \kappa'(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$, on déduit $x = \phi_r(x) \in \phi_r(\kappa')(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$ puis $x = \phi_r(x) = 0$, puisque $\phi_r \circ \phi_r(\kappa') = 0$. L'application Ψ est donc injective.

Passons à la surjectivité. Considérons $x \in \text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}^{\phi_r=1}$ et notons $\hat{x} \in \hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M}$ un relevé quelconque de x . On vérifie que $\hat{x} \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$ et que $\phi_r(\hat{x}) = \hat{x} + y$ pour un certain $y \in \kappa'(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. Posons $\hat{x}_1 = \hat{x} + y \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. On a $\hat{x}_1 \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$ et $\phi_r(\hat{x}_1) = \hat{x}_1 + y'$ pour un certain $y' \in \phi_r(\kappa')(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. On pose finalement $\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + y' \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$ de façon à ce que $\phi_r(\hat{x}_2) = \hat{x}_2$. On a $N(\hat{x}_2) = N(\hat{x}) + N(y) + N(y') \in \kappa'(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$. Par ailleurs, $N(\hat{x}_2) = N \circ \phi_r(\hat{x}_2) = c^{-1} \phi_r(E(u)N(\hat{x}_2))$, d'où l'on déduit $N(\hat{x}_2) \in \phi_r(\kappa')(\hat{A}_{\text{st}}/p\hat{A}_{\text{st}} \otimes_{S_1} \mathcal{M})$ puis en appliquant à nouveau l'argument $N(\hat{x}_2) = 0$. Cela assure au final que \hat{x}_2 est un antécédent par Ψ de x . \square

2.3.4 Lien entre les foncteurs T_{st}^* et $T_{\text{st}\star}$

Fixons ε une suite de racines p^n -ièmes de l'unité et définissons $t = \log([\varepsilon]) \in A_{\text{cris}}$ où le log est donné par la série usuelle. On a $\phi(t) = pt$, et par [Fon94a] $(\text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st}}/p^n)_{N=0}^{\phi_r=1} = (\text{Fil}^r A_{\text{cris}}/p^n)^{\phi_r=1}$ s'égalise avec $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \cdot t^r$. Ainsi la représentation galoisienne $(\text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st},\infty})_{N=0}^{\phi_r=1}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$.

On ne sait toujours pas que le foncteur $T_{\text{st}\star}$ est bien défini mais si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ muni d'une filtration admissible fixée, on peut définir une application :

$$\Psi : T_{\text{st}\star}(\mathcal{M}) \rightarrow T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})^\vee(r)$$

où par définition $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})^\vee(r)$ est la représentation galoisienne $\text{Hom}(T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r))$. En effet, soient $x = \sum_i a_i \otimes x_i \in \text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$, et $f : \mathcal{M} \rightarrow \hat{A}_{\text{st},\infty}$ compatible aux structures. On pose $\Psi(x)(f) = \sum_i a_i f(x_i)$. Comme l'application $\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M} \rightarrow \hat{A}_{\text{st},\infty}$, $a \otimes x \mapsto af(x)$ respecte le Fil^r (il suffit pour cela de voir que pour $0 \leq s \leq r$, $f(\text{Fil}^s \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^s \hat{A}_{\text{st},\infty}$; pour $s = r$, c'est l'hypothèse et sinon on montre que $\text{Fil}^s \hat{A}_{\text{st},\infty}$ s'identifie aux éléments $x \in \text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st},\infty}$ pour lesquels $E(u)^{r-s}x \in \text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st},\infty}$), il vient $\Psi(x)(f) \in (\text{Fil}^r \hat{A}_{\text{st},\infty})_{N=0}^{\phi_r=1} \simeq \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(r)$, et donc Ψ est bien définie. On vérifie immédiatement que Ψ est un morphisme \mathbb{Z}_p -linéaire commutant à l'action de Galois.

On veut démontrer que Ψ est un isomorphisme pour tout objet $\mathcal{M} \in \underline{\mathcal{M}}^r$ et pour cela on suit la démonstration du paragraphe 3.2.1. de [Bre98] (qui concerne le cas $e = 1$) : la méthode consiste à prouver que Ψ est un isomorphisme pour les objets tués par p , à démontrer que le foncteur $T_{\text{st}\star}$ est bien défini et exact, puis à conclure à l'aide d'un dévissage.

On rappelle, dans un premier temps, que les objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$ ont une structure relativement simple (proposition 4.1.1 de [Car06]) :

Proposition 2.3.6. *Soit \mathcal{M} un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors \mathcal{M} est tué par p et admet une base⁴ (e_1, \dots, e_d) pour laquelle il existe des entiers n_1, \dots, n_d compris entre 0 et r tels que :*

$$\text{Fil}^r \mathcal{M} = \text{Fil}^p S \mathcal{M} + \sum_{i=1}^d u^{n_i} S_1 e_i.$$

De plus $N(e_i) = 0$ pour tout i et il existe une (unique) matrice G inversible à coefficients dans k telle que :

$$\begin{pmatrix} \phi_r(u^{n_1} e_1) \\ \vdots \\ \phi_r(u^{n_d} e_d) \end{pmatrix} = {}^t G \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_d \end{pmatrix}.$$

Lemme 2.3.7. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Pour tout s compris entre 0 et r , on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow \text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \xrightarrow{N} \text{Fil}^{s-1}(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

où par convention $\text{Fil}^{-1}(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) = \hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}$.

⁴Une base vérifiant simplement la condition de cette phrase est appelée *base adaptée* (à la filtration) et existe pour tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ annulé par p (sans hypothèse de simplicité).

Démonstration. La démonstration est la même que celle du lemme 3.2.1.3 de [Bre98]. Toutefois, on se ramène à la fin, non pas à un objet de $\underline{MF}_k^{f,r}$ (en reprenant les notations de l'article), mais à un objet simple de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ dont la structure est connue par la proposition 2.3.6. Le même argument s'applique alors. \square

On déduit des deux lemmes précédents le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.8. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$. Alors $\text{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ ne dépend pas de la filtration admissible choisie et si :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors la suite induite :

$$0 \longrightarrow \text{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} \longrightarrow \text{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow \text{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} \longrightarrow 0$$

est également exacte.

Démonstration. Comme dans la proposition 3.2.1.4 de [Bre98], on se ramène à montrer la première partie du corollaire lorsque \mathcal{M} est un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On introduit les e_i et les n_i données par la proposition 2.3.6.

Si $q = s + \frac{\delta}{e}$ pour des entiers s et e avec $0 \leq \delta < e$, on pose :

$$\begin{aligned} \text{Fil}^q S_1 &= u^\delta \text{Fil}^s S_1 + \text{Fil}^{s+1} S_1 \\ \text{Fil}^q(A_{\text{cris}}/p) &= [\pi]^\delta \text{Fil}^s(A_{\text{cris}}/p) + \text{Fil}^{s+1}(A_{\text{cris}}/p) \\ \text{Fil}^q(\hat{A}_{st}/p) &= u^\delta \text{Fil}^s(\hat{A}_{st}/p) + \text{Fil}^{s+1}(\hat{A}_{st}/p). \end{aligned}$$

On note $\text{Fil}_M \mathcal{M}$ la filtration admissible définie par :

$$\text{Fil}_M^s \mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} / E(u)^{r-s} x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}\} = \bigoplus_{i=1}^d \text{Fil}^{\frac{n_i}{e} - (r-s)} S_1 e_i$$

où par convention $\text{Fil}^q S_1 = S_1$ si $q < 0$. Cette filtration est maximale dans le sens où $\text{Fil}^s \mathcal{M} \subset \text{Fil}_M^s \mathcal{M}$ pour tout s . Les descriptions précédentes impliquent :

$$\text{Fil}_M^r(\hat{A}_{st}/p \otimes_{S_1} \mathcal{M})_{N=0} = \bigoplus_{i=1}^d \text{Fil}^{\frac{n_i}{e}} A_{\text{cris}}/p e_i.$$

De l'égalité $[\pi]^\delta \gamma_s([\pi]^e) = (1+X)^{se+\delta} u^\delta \gamma_s(u^e)$, on déduit l'inclusion $\text{Fil}^q(A_{\text{cris}}/p) \subset \hat{A}_{st} \otimes_{S_1} \text{Fil}^q S_1$. Il s'ensuit $\text{Fil}_M^r(\hat{A}_{st}/p \otimes_{S_1} \mathcal{M})_{N=0} \subset \hat{A}_{st}/p \otimes_{S_1} \text{Fil}^r \mathcal{M}$, puis le corollaire. \square

Remarque. On prouve de même que si $0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^r$, alors la suite :

$$0 \longrightarrow (\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}')_{N=0} \longrightarrow (\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow (\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M}'')_{N=0} \longrightarrow 0$$

l'est aussi.

D'autre part, le corollaire précédent prouve en particulier que $T_{\text{st}\star}(\mathcal{M})$ ne dépend pas de la filtration choisie. Ainsi le foncteur $T_{\text{st}\star}$ est bien défini.

Lemme 2.3.9. *Si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1} \longrightarrow \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \xrightarrow{\phi_r - \mathrm{id}} (\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\phi_r - \mathrm{id}$ est surjective. De même que dans le lemme 3.2.1.6 de [Bre98], on se ramène au cas d'un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$. On reprend les notations de la proposition 2.3.6. On a vu dans la preuve du corollaire 2.3.8 que :

$$\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} = \bigoplus_{i=1}^d \mathrm{Fil}^{\frac{n_i}{e}}(A_{\mathrm{cris}}/p) e_i.$$

On adapte ensuite les arguments de la preuve du lemme 3.2.1.6 de [Bre98]. En décomposant un élément de $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{st} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ sur la somme directe précédente, puis un élément de $\mathrm{Fil}^{\frac{n_i}{e}}(A_{\mathrm{cris}}/p)$ comme une somme d'un élément de $\mathrm{Fil}^p(A_{\mathrm{cris}}/p)$ et d'un multiple de $[\pi]^{n_i}$, on se ramène à montrer que pour toute famille $(z_i)_{1 \leq i \leq d}$ d'éléments de A_{cris}/p , il existe des $x_i \in A_{\mathrm{cris}}/p$ et des $y_i \in \mathrm{Fil}^p(A_{\mathrm{cris}}/p)$ vérifiant l'égalité matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \phi(x_1) \\ \vdots \\ \phi(x_d) \end{pmatrix} - G^{-1} \begin{pmatrix} [\pi]^{n_1} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ [\pi]^{n_d} x_d + y_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}.$$

Pour conclure, on procède comme dans la preuve de la partie 3) de la proposition 3.2.2.1 de [Bre97a] en décomposant selon l'isomorphisme $A_{\mathrm{cris}}/p \simeq R/\pi^{ep}R \oplus \mathrm{Fil}^p(A_{\mathrm{cris}}/p)$ (voir lemme 3.1.2.2 de [Bre97a]). \square

Corollaire 2.3.10. *Le foncteur $T_{st\star}$ est exact.*

On déduit finalement de cette étude le théorème suivant :

Théorème 2.3.11. *L'application Ψ définie précédemment induit une transformation naturelle inversible entre les foncteurs $T_{st\star}$ et $(T_{st}^*)^\vee(r)$.*

Démonstration. Comme la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ est artinienne, et que les foncteurs T_{st}^* et $T_{st\star}$ sont exacts, il suffit de montrer le résultat lorsque \mathcal{M} est un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Si \mathcal{M} est un objet simple de $\underline{\mathcal{M}}^r$, la proposition 2.3.6 nous assure dans un premier temps que \mathcal{M} est tué par p . On a donc :

$$T_{st}^*(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}(T(\mathcal{M}), \tilde{A}) \quad \text{et} \quad T_{st\star}(\mathcal{M}) = \mathrm{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}^{\phi_r=1}.$$

Par ailleurs la même proposition fournit une description explicite de $T(\mathcal{M})$ et de ses structures supplémentaires. Précisément, il existe des entiers n_i tels que :

$$\begin{aligned} T(\mathcal{M}) &= \tilde{S}e_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{S}e_d \\ \mathrm{Fil}^r T(\mathcal{M}) &= \tilde{S}u^{n_1}e_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{S}u^{n_d}e_d \end{aligned}$$

avec de surcroît $N(e_i) = 0$ pour tout i . Par ailleurs, quitte à passer à une extension non ramifiée de K , on peut supposer (voir théorème 4.3.2 de [Car06]) que ϕ_r est donné par $\phi_r(u^{n_i}e_i) = e_{i+1}$, les indices étant considérés modulo d .

Des descriptions précédentes, on déduit facilement :

$$\mathrm{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0} = \bar{\pi}_1^{n_1} \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus \bar{\pi}_1^{n_d} \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi \cdot e_d$$

où $\bar{\pi}_1$ est la réduction modulo π de π_1 (qui, on le rappelle, est une racine p -ième de π fixée). L'opérateur ϕ_r agit sur ce module par $\phi_r(\bar{\pi}_1^{n_i} e_i) = e_{i+1}$. Tout élément de $\text{Fil}^r(\tilde{A} \otimes_{\tilde{S}} T(\mathcal{M}))_{N=0}$ s'écrit de façon unique $x = \sum_{i=1}^d a_i \otimes e_i$ avec $a_i = \pi_1^{n_i} x_i$ et un tel élément appartient à $T_{\text{st}\star}(\mathcal{M})$ si, et seulement si :

$$x_i^p = \bar{\pi}_1^{n_{i+1}} x_{i+1}$$

pour tout indice $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Par ailleurs, se donner un élément de $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ revient à se donner l'image b_i de chacun des e_i , ces images devant vérifier $N(b_i) = 0$, $u^{n_i} b_i \in \text{Fil}^r \tilde{A}$ et commuter à ϕ_r . La première condition impose $b_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$. La deuxième condition assure que $b_i = \pi_1^{m_i} y_i$ pour $m_i = er - n_i$ et $y_i \in \mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi$. Finalement, la commutation à ϕ_r impose les relations :

$$\zeta^r y_i^p = \bar{\pi}_1^{m_{i+1}} y_{i+1}$$

où $\zeta \in k^*$ est la réduction modulo π de $-\frac{\pi^e}{p}$. Soient ε une racine $(p-1)$ -ième de ζ et $z_i = \varepsilon^r y_i$ de sorte que la relation précédente fournisse :

$$z_i^p = \bar{\pi}_1^{m_{i+1}} z_{i+1}.$$

Comme $\varepsilon \in \bar{k}^*$, on est ramené à prouver que l'accouplement :

$$(x_1, \dots, x_d) \times (z_1, \dots, z_d) \mapsto \sum_{i=1}^d x_i z_i$$

défini sur les couples de d -uplets solutions des systèmes précédents est non dégénéré. (On remarquera que cet accouplement est à valeurs dans $\{\lambda \in (\mathcal{O}_{\bar{K}}/\pi)/\lambda^p = \bar{\pi}_1^{er} \lambda\}$ qui est, par le lemme 5.1.2. de [Car06]⁵, bien un \mathbb{F}_p -espace vectoriel de dimension 1, en l'occurrence engendré par la réduction modulo p d'une racine $(p-1)$ -ième de π_1^{er} .) Par une variante du lemme *loc. cit.*, si on choisit η_1 une racine $(p^d - 1)$ -ième de π_1 , si on note $\bar{\eta}_1$ sa réduction modulo π , et si on pose :

$$\begin{aligned} s_i &= n_i p^{d-1} + n_{i+1} p^{d-2} + \dots + n_{i+d-1} \\ t_i &= m_i p^{d-1} + m_{i+1} p^{d-2} + \dots + m_{i+d-1} \end{aligned}$$

les solutions de ces systèmes s'écrivent :

$$x_i = x^{p^i} \bar{\eta}_1^{s_{i+1}} \quad \text{et} \quad z_i = z^{p^i} \bar{\eta}_1^{t_{i+1}}$$

où x et z décrivent \mathbb{F}_q ($q = p^d$), l'ensemble des racines dans \bar{k} de l'équation $\lambda^q = \lambda$. Il vient $\sum_{i=1}^d x_i z_i = \text{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(xz) \cdot \bar{\eta}_1^v$ où $v = s_i + t_i = er \cdot \frac{q-1}{p-1}$ est indépendant de i , et on conclut en remarquant que la trace de \mathbb{F}_q à \mathbb{F}_p est une forme bilinéaire non dégénérée. \square

En vertu de ce théorème, tous les résultats démontrés sur le foncteur T_{st}^* se transposent au foncteur $T_{\text{st}\star}$. On obtient ainsi un équivalent du théorème 2.3.1 :

Théorème 2.3.12. *Le foncteur $T_{\text{st}\star}$ est exact, pleinement fidèle, d'image essentielle stable par quotients et par sous-objets. De plus, si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ isomorphe en tant que S -module à $S_{n_1} \oplus \dots \oplus S_{n_d}$, alors la représentation galoisienne $T_{\text{st}\star}(\mathcal{M})$ est isomorphe en tant que \mathbb{Z}_p -module à $\mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/p^{n_d}\mathbb{Z}$.*

⁵Dans cette référence, on travaillait non pas modulo π mais modulo p . Cependant, on vérifie sans mal que la méthode marche dans les deux cas.

2.3.5 Le cas $r = 0$

Comme en 2.2.3, il est possible d'obtenir des descriptions plus simples des objets précédents lorsque $r = 0$. Précisément, si \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^0$ et si $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\kappa\mathcal{M}$ (où on rappelle que κ est le noyau de $S \rightarrow W$), on détermine dans ce paragraphe des formules simples et explicites pour obtenir les représentations galoisiennes $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ et $T_{\text{st}\star}(\mathcal{M})$ à partir de $\tilde{\mathcal{M}}$.

On commence par la version contravariante. On introduit le W -module $CW(\bar{k}) = W(\bar{k}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ où $W(\bar{k})$ est l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans \bar{k} . Il est muni d'un Frobenius provenant du Frobenius usuel sur l'anneau des vecteurs de Witt. Comme pour tout entier n , $W_n(\bar{k})$ est naturellement une sous-algèbre de $A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}$, on en déduit par passage à la limite que $CW(\bar{k})$ apparaît comme un sous-module de $A_{\text{cris},\infty}$ et donc également de $\hat{A}_{\text{st},\infty}$.

Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ un W -module de torsion de type fini muni d'un automorphisme ϕ_0 semi-linéaire par rapport au Frobenius. On pose :

$$T_{\text{nr}}^*(\tilde{\mathcal{M}}) = \text{Hom}(\tilde{\mathcal{M}}, CW(\bar{k}))$$

où le « Hom » signifie que l'on ne retient que les morphismes W -linéaires commutant à l'action du Frobenius. Si maintenant \mathcal{M} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^0$ et $\tilde{\mathcal{M}} = T(\mathcal{M}) = \mathcal{M}/\kappa\mathcal{M}$, l'extension des scalaires de W à S (voir preuve de la proposition 2.2.8) fournit un morphisme canonique $T_{\text{nr}}^*(\tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$.

Proposition 2.3.13. *Avec les notations précédentes, le morphisme $T_{\text{nr}}^*(\tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Les foncteurs T_{nr}^* et T_{st}^* étant exacts (voir proposition A.1.2.4.(ii) et remarque A.1.2.7 de [Fon91] pour T_{nr}^*), un argument standard de dévissage permet de nous restreindre aux objets annulés par p . On vérifie directement que le morphisme $T_{\text{nr}}^*(\tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ est injectif. Par ailleurs, on a rappelé (voir théorème 2.3.1) que $\dim_{\mathbb{F}_p} T_{\text{st}}^*(\mathcal{M}) = \dim_S \mathcal{M}$ et, d'après (la preuve de) la proposition A.1.2.6 de [Fon91], on a également $\dim_{\mathbb{F}_p} T_{\text{nr}}^*(\tilde{\mathcal{M}}) = \dim_k \tilde{\mathcal{M}}$. Il s'ensuit l'égalité des dimensions entre $T_{\text{nr}}^*(\tilde{\mathcal{M}})$ et $T_{\text{st}}^*(\mathcal{M})$ puis la surjectivité du morphisme. \square

Corollaire 2.3.14. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^0$ et $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/\kappa\mathcal{M}$. Alors, on a un isomorphisme canonique et fonctoriel :*

$$T_{\text{st}\star}(\mathcal{M}) \simeq (\tilde{\mathcal{M}} \otimes_W W(\bar{k}))^{\phi \otimes \phi = 1}.$$

Démonstration. Appelons $T_{\text{nr}\star}(\tilde{\mathcal{M}})$ le terme apparaissant dans le second membre de l'isomorphisme de l'énoncé. Avec la proposition précédente, le corollaire est une conséquence immédiate des liens entre $T_{\text{st}\star}$ et T_{st}^* (théorème 2.3.11) d'une part et $T_{\text{nr}\star}$ et T_{nr}^* (voir remarque A.1.2.7 de [Fon91]) d'autre part. \square

3 Les faisceaux sur le site log-syntomique

3.1 Rappels et préliminaires

3.1.1 Log-schémas et sites usuels

On renvoie à [Kat89] pour la définition et les propriétés des log-schémas et des morphismes de log-schémas (en particulier des morphismes log-lisses ou log-étales). Tous les log-schémas considérés dans ce papier sont intègres. Si S est un log-schéma, on note \dot{S} le schéma sous-jacent.

Si M est un monoïde, on note M^{gp} le groupe associé, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme ab^{-1} pour a et b dans M où deux éléments ab^{-1} et cd^{-1} sont identifiés s'il existe $s \in M$ tel que $sad = sbc$ (i.e. simplement $ad = bc$ si M est intègre). Si M est un monoïde et G un sous-groupe de M^{gp} , on définit le quotient M/G comme le quotient de M par la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in G$.

Si S est un log-schéma fin dont le schéma sous-jacent est tué par un entier non nul et muni d'un idéal à puissances divisées et si X est un log-schéma fin sur S auquel les puissances divisées s'étendent, on note $(X/S)_{\text{cris}}$ le petit site (log-)cristallin fin (défini dans [Kat89], chapitre 5) et $(X/S)_{\text{CRIS}}$ le gros site (log-)cristallin fin (défini dans [Bre96], chapitre 3). On note $\mathcal{O}_{X/S}$ le faisceau structural sur ces sites, $\mathcal{I}_{X/S}$ son idéal à puissances divisées et $\mathcal{I}_{X/S}^{[n]}$ les puissances divisées successives de $\mathcal{I}_{X/S}$.

Si S est un log-schéma fin, on note $S_{\text{ét}} = \dot{S}_{\text{ét}}$ le petit site (log-)étale de S : c'est la catégorie des log-schémas X pour lesquels \dot{X} est étale sur \dot{S} et la log-structure sur X est induite par celle de S , les recouvrements étant les recouvrements étales usuels (sur les schémas sous-jacents). On note également $S_{\text{ÉT}}$ le gros site (log-)étale de S défini comme la catégorie des log-schémas fins localement de type fini sur S et munie de la topologie étale. On note \mathcal{O}_X le faisceau structural sur chacun de ces deux sites.

3.1.2 Topologie log-syntomique

On rappelle la définition d'un morphisme de log-schémas log-syntomiques, due à Kato (voir [Kat89]) :

Définition 3.1.1. *Un morphisme de log-schémas fins $f : Y \rightarrow X$ est dit log-syntomique s'il est intègre, si $\dot{f} : \dot{Y} \rightarrow \dot{X}$ est localement de présentation finie, et si f peut s'écrire étale localement comme la composée d'un morphisme log-lisse avec une immersion fermée exacte dont l'idéal est engendré en chaque point par une suite transversalement régulière relativement à X .*

On montre (voir propositions 6.1.1.3 et 6.1.1.4 de [BM02]) que les morphismes log-syntomiques sont stables par changement de base et par composition. En outre, on dispose de la propriété remarquable suivante (proposition 6.1.1.5 de *loc. cit.*) :

Proposition 3.1.2. *Si $Y \rightarrow X$ est une immersion fermée exacte, on peut étale-localement relever les morphismes log-syntomiques sur Y en des morphismes log-syntomiques sur X .*

Si S est un log-schéma fin, on note S_{SYN} le gros site (log-)syntomique sur X , c'est-à-dire la catégorie des log-schémas fins localement de type fini sur X munie de la topologie log-syntomique : une famille $(f_i : X_i \rightarrow X)$ recouvre X si tous les morphismes f_i sont log-syntomiques et si topologiquement $\dot{X} = \bigcup_i f_i(\dot{X}_i)$. De même on définit le petit site (log-)syntomique S_{syn} en se restreignant à la catégorie des log-schémas log-syntomiques sur S . On rappelle les faits généraux suivants :

1. Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ entre log-schémas fins induit un morphisme de topoï $f_{\text{SYN}} : \widetilde{X}_{\text{SYN}} \rightarrow \widetilde{Y}_{\text{SYN}}$. Pour les petits sites, on peut définir des foncteurs f_{syn}^* et $f_{\text{syn}\star}$ adjoints l'un de l'autre, mais on ne sait pas démontrer que $f_{\text{syn}\star}$ est exact (à gauche). Cependant le changement de base définit un foncteur $X_{\text{syn}} \rightarrow Y_{\text{syn}}$ qui est continu pour les topologies de Grothendieck (voir [Art62]). Ainsi $f_{\text{syn}\star}$ envoie faisceaux mous sur faisceaux mous, et on dispose encore de la suite spectrale de Leray.
2. On dispose d'un foncteur de restriction $p_{S\star} : \widetilde{S}_{\text{SYN}} \rightarrow \widetilde{S}_{\text{syn}}$ qui est exact et admet un adjoint à gauche p_S^* . On ne sait pas montrer que p_S^* est exact (à gauche), mais le morphisme

d'inclusion $S_{\text{syn}} \rightarrow S_{\text{SYN}}$ est continu pour les topologies de Grothendieck de sorte que l'on dispose d'un isomorphisme $R\Gamma(S_{\text{SYN}}, \mathcal{F}) \simeq R\Gamma(S_{\text{syn}}, p_{S_*}\mathcal{F})$ pour tout faisceau abélien \mathcal{F} sur S_{SYN} .

- Si $i : Y \rightarrow X$ est une immersion fermée exacte, les foncteurs $i_{\text{SYN}*}$ et $i_{\text{syn}*}$ sont exacts en vertu de la proposition 3.1.2.

3.1.3 Plusieurs bases

Sauf mention explicite du contraire, on suppose à partir de maintenant que $r > 0$. Ceci implique en particulier $e < p - 1$.

Pour la suite, on sera amené à considérer plusieurs bases qui sont :

$$\begin{aligned} (0 \rightarrow W_n) & ; \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathcal{O}_K \\ 1 & \mapsto & \pi \end{array} \right) ; \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathcal{O}_K/p^n \\ 1 & \mapsto & \pi \end{array} \right) ; \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N}u & \rightarrow & W_n[u] \\ u & \mapsto & u \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N}u & \rightarrow & S_n \\ u & \mapsto & u \end{array} \right) & ; \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N}u & \rightarrow & \tilde{S} \\ u & \mapsto & u \end{array} \right) ; \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N}u & \rightarrow & \tilde{S}_{(2)} \\ u & \mapsto & u \end{array} \right) ; \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{N}u & \rightarrow & k \\ u & \mapsto & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

On note simplement celles de la première ligne $\text{Spec } W_n$ (ou même parfois seulement W_n), T , T_n et V_n dans cet ordre. Pour la seconde ligne, on utilise les notations E_n , \tilde{E} , $\tilde{E}_{(2)}$ et \bar{E} (ou encore \bar{T}) dans cet ordre. La base $\tilde{E}_{(2)}$ ne sera utilisée que pour $e \geq 2$. Pour des raisons pratiques, on travaillera aussi avec la base V'_n qui est simplement V_n dans laquelle on a noté x_0 l'indeterminée à la place de u .

Les bases $\text{Spec } W_n$ et T_n sont munies de puissances divisées sur l'idéal engendré par p . Les bases E_n , \tilde{E} et $\tilde{E}_{(2)}$ en possèdent sur l'idéal engendré par les $\frac{E(u)^i}{i!}$ pour $i \geq 1$. Finalement, on munit également \bar{E} de puissances divisées sur l'idéal nul. On a un diagramme commutatif⁶ :

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & \hookrightarrow & T_2 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & T_n & \hookrightarrow & \dots \\ & \swarrow & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ \tilde{E} & \hookrightarrow & \tilde{E}_{(2)} & \hookrightarrow & E_1 & \hookrightarrow & E_2 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & E_n & \hookrightarrow & \dots \end{array}$$

où tous les morphismes sont des épaissements et les flèches verticales, obtenues en envoyant u sur π , sont compatibles aux puissances divisées. On a de plus des morphismes évidents $E_n \rightarrow V_n$ et $V_n \rightarrow \text{Spec } W_n$ dont la composée est aussi compatible aux puissances divisées.

Les bases E_n , $\tilde{E}_{(2)}$, \tilde{E} et \bar{E} sont munies d'un (relèvement du) Frobenius : c'est la multiplication par p sur les monoïdes, le Frobenius défini au paragraphe 2.1.1 sur S_n , et l'élévation à la puissance p sur $\tilde{S}_{(2)}$, \tilde{S} et k .

3.2 Définition des faisceaux

À partir de maintenant, on reprend la situation de l'introduction : X est un schéma sur \mathcal{O}_K propre et semi-stable. Dans ces conditions, sa fibre spéciale définit une log-structure qui en fait un log-schéma log-lisse sur T . Pour tout n , on pose $X_n = X \times_T T_n$, c'est un log-schéma log-lisse sur T_n et de plus si $n = 1$, le morphisme structural $X_1 \rightarrow T_1$ est du type de Cartier (voir définition 4.8 de [Kat89]). Le but de ce paragraphe est d'introduire des faisceaux sur le site

⁶Si $e = 1$, il faut retirer le schéma $\tilde{E}_{(2)}$ du diagramme.

$(T_n)_{\text{SYN}}$ (et donc aussi $(T_n)_{\text{syn}}$, $(X_n)_{\text{SYN}}$ et $(X_n)_{\text{syn}}$ par restriction⁷) que l'on aura à manipuler constamment par la suite.

Pour débiter, sur chacun des sites précédents, on note \mathcal{O}_n le faisceau structural modulo p^n .

Le faisceau $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$. Fixons un entier $n \geq 1$. On montre (voir [Bre98]) que l'association :

$$U \mapsto H^0((U/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{U/W_n}) = H^0((U/W_n)_{\text{CRIS}}, \mathcal{O}_{U/W_n})$$

(où U sur T_n est vu sur W_n grâce au morphisme canonique $T_n \rightarrow W_n$) définit un faisceau sur le site $(T_n)_{\text{SYN}}$ que l'on appelle $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$. Il est muni d'une filtration définie par les sous-faisceaux :

$$\mathcal{J}_n^{[s], \text{cris}} : U \mapsto H^0((U/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{U/W_n}^{[s]}) = H^0((U/W_n)_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{U/W_n}^{[s]})$$

pour tout entier (relatif) s . Les restrictions de ces faisceaux aux sites $(T_n)_{\text{syn}}$, $(X_n)_{\text{SYN}}$ et $(X_n)_{\text{syn}}$ sont encore notées $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$ et $\mathcal{J}_n^{[s], \text{cris}}$. De plus (voir *loc. cit.*) la cohomologie des précédents faisceaux permet de retrouver la cohomologie cristalline de X_n . Précisément on a :

$$\begin{aligned} H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) &= H^i((X_n)_{\text{SYN}}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) = H^i((X_n/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X_n/W_n}) \\ &= H^i((X_n/W_n)_{\text{CRIS}}, \mathcal{O}_{X_n/W_n}) \end{aligned} \quad (3)$$

et des formules analogues pour les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[s], \text{cris}}$.

Le faisceau $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$. De même, à l'aide de l'épaississement $T_n \hookrightarrow E_n$, pour tout entier s , on définit les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ sur le site $(T_n)_{\text{SYN}}$ par l'association :

$$U \mapsto H^0((U/E_n)_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{U/E_n}^{[s]}) = H^0((U/E_n)_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{U/E_n}^{[s]})$$

et on pose $\mathcal{O}_n^{\text{st}} = \mathcal{J}_n^{[0]}$. Comme précédemment, la cohomologie de ces faisceaux restreints à $(X_n)_{\text{syn}}$ ou $(X_n)_{\text{SYN}}$ permet de retrouver la cohomologie cristalline (munie de sa filtration par les puissances divisées) de X_n relativement à la base E_n .

Du fait que le morphisme $T_n \rightarrow W_n$ se factorise par l'épaississement $T_n \rightarrow E_n$, on récupère un morphisme de faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{cris}} \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{st}}$ qui envoie la s -ième puissance divisée $\mathcal{J}_n^{[s], \text{cris}}$ sur $\mathcal{J}_n^{[s]}$.

Le cas $n = 1$. Comme nous l'avons déjà vu en 2.2, il est agréable de considérer les bases \tilde{S} et $\tilde{S}_{(2)}$ pour étudier les objets modulo p . Cette constatation est encore valable à ce niveau, et pour mener à bien l'étude de la cohomologie des faisceaux précédents, nous allons être amené à manipuler des versions des faisceaux $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ et $\mathcal{J}_1^{[s]}$ sur les bases \tilde{E} , $\tilde{E}_{(2)}$ (lorsque $e \geq 2$) et également \bar{E} . Si Υ est l'une des deux premières bases, on pose :

$$\mathcal{J}_{\Upsilon}^{[s]}(U) = H^0((U/\Upsilon)_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{U/\Upsilon}^{[s]}) = H^0((U/\Upsilon)_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{U/\Upsilon}^{[s]})$$

et on agrégera souvent $\mathcal{J}_{\tilde{E}}^{[s]}$ (resp. $\mathcal{J}_{\tilde{E}_{(2)}}^{[s]}$) en $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$ (resp. $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]}$). Réciproquement, on pourra aussi écrire $\mathcal{J}_{\tilde{E}_1}^{[s]}$ pour $\mathcal{J}_1^{[s]}$. Pour $\Upsilon = \bar{E}$, la situation est légèrement différente car on dispose d'un morphisme $\bar{E} \rightarrow T_1$ et non le contraire. La formule dans ce cas est :

$$\mathcal{J}_{\bar{E}}^{[s]}(U) = \bar{\mathcal{J}}^{[s]}(U) = H^0((\bar{U}/\bar{E})_{\text{cris}}, \mathcal{J}_{\bar{U}/\bar{E}}^{[s]}) = H^0((\bar{U}/\bar{E})_{\text{CRIS}}, \mathcal{J}_{\bar{U}/\bar{E}}^{[s]})$$

où U est un log-schéma sur T_1 et où $\bar{U} = U \times_{T_1} \bar{E}$. Lorsque $s = 0$, on s'autorise à remplacer « $\mathcal{J}^{[0]}$ » par « \mathcal{O}^{st} » dans toutes les écritures. Comme précédemment, on a des formules analogues à (3) que nous laissons au lecteur le soin d'écrire.

⁷Notez que X_n est log-syntomique sur T_n , de sorte que $(X_n)_{\text{syn}}$ est un sous-site de $(T_n)_{\text{syn}}$.

3.3 Calculs locaux

L'auteur remercie le referee de lui avoir signalé la méthode exposée ci-dessous, sans doute plus simple que celle de [Bre98], pour mener à bien les calculs locaux.

3.3.1 Méthode générale

Pour les manipulations à venir, on aura besoin de donner des descriptions locales très explicites des faisceaux précédents, au moins sur les petits sites. Donner ces descriptions sera pour nous donner des formules pour $\mathcal{F}(U)$ où \mathcal{F} est le faisceau que l'on cherche à décrire et où U a une forme bien particulière.

Considérons pour l'instant un log-schéma U log-syntomique sur T_n . Par définition des morphismes log-syntomiques, quitte à remplacer U par un schéma étale sur U (qui est certainement aussi log-syntomique), on peut supposer qu'il existe un log-schéma Y log-lisse sur V'_n et une immersion fermée exacte $U \hookrightarrow Y \times_{V'_n} T_n$ dont l'idéal est engendré par une suite régulière f_1, \dots, f_t de sections globales de $\mathcal{O}_{Y \times_{V'_n} T_n}$. Si l'on note encore x_0 les éléments de $\Gamma(Y, M_Y)$ (M_Y étant le faisceau de monoïdes associé à Y) et $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ images de x_0 , la composée $U \rightarrow Y \times_{V'_n} T_n \rightarrow Y$ est encore une immersion fermée exacte dont l'idéal est engendré par la suite régulière $E(x_0), f_1, \dots, f_t$. Quitte à restreindre encore U , on peut supposer en outre que $\dot{U} = \text{Spec } A$ et $\dot{Y} = \text{Spec } B$ sont affines et qu'il existe des sections globales x_1, \dots, x_d de M_Y telles que les dlog x_i forment une base de Ω_{Y/V'_n}^1 . La famille des dlog x_i ($0 \leq i \leq d$) forme alors une base de Ω_{Y/W_n}^1 .

Les ouverts que nous allons considérer pour les calculs locaux sont encore des raffinements des U précédents. Avant de les décrire, fixons une notation : si R est un anneau et P un monoïde intègre, $\text{Spec}(R)[P]$ désigne le schéma $\text{Spec}(R[P])$ muni de la log-structure associée au morphisme de monoïdes canonique $P \rightarrow R[P]$. Pour tout entier i , notons à présent U^i et Y^i les log-schémas rendant les deux carrés du diagramme suivant cartésiens :

$$\begin{array}{ccccc} U^i & \longrightarrow & Y^i & \longrightarrow & \text{Spec}(W_n)[\mathbb{N}^{r+1}] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow (a_0, \dots, a_r) \mapsto (p^i a_0, \dots, p^i a_r) \\ U & \longrightarrow & Y & \xrightarrow{(a_0, \dots, a_r) \mapsto x_0^{a_0} \dots x_r^{a_r}} & \text{Spec}(W_n)[\mathbb{N}^{r+1}] \end{array}$$

Par propriété de changement de base, les morphismes $U^i \rightarrow U$ sont log-syntomiques et Y^i est log-lisse sur W_n . De plus, les schémas sous-jacents à U^i et Y^i sont affines d'anneaux respectifs notés A^i et B^i et on a la propriété fondamentale suivante :

$$\varinjlim_i \Gamma(Y^i, \Omega_{Y^i/W_n}^1) = 0$$

qui va permettre d'utiliser un calcul à la de Rham pour déterminer les $\varinjlim_i \mathcal{F}(U^i)$ pour les faisceaux \mathcal{F} qui nous intéressent.

Nous ajoutons finalement encore quelques notations. On désigne par A^∞ (resp. B^∞) la limite inductive des A^i (resp. B^i). Par la suite, nous utiliserons les lettres minuscules caligraphiées (f , g , h , *etc.*) pour désigner les préfaisceaux sur les sites syntomiques et les majuscules correspondantes (\mathcal{F} , \mathcal{G} , \mathcal{H} , *etc.*) pour les faisceaux associés. De plus, si f est un préfaisceau, nous notons $f(U^\infty) = \varinjlim_i f(U^i)$. La proposition suivante énumère certains résultats élémentaires, déjà en partie utilisés et énoncés dans la littérature (voir par exemple la proposition 6.2.2.1 de [BM02]), que nous manipulerons constamment par la suite.

Proposition 3.3.1. *Soient f, g et h trois préfaisceaux sur $(T_n)_{\text{syn}}$ et $\alpha : f \rightarrow g, \beta : g \rightarrow h$ deux morphismes. On note \mathcal{F}, \mathcal{G} et \mathcal{H} les faisceaux associés. Alors :*

1. *si α induit un isomorphisme $f(U^\infty) \rightarrow g(U^\infty)$ pour tout U de la forme précédente, l'application induite $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un isomorphisme ;*
2. *si α et β induisent une suite exacte $f(U^\infty) \rightarrow g(U^\infty) \rightarrow h(U^\infty)$ pour tout U de la forme précédente, la suite $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ est elle-même exacte ;*
3. *si a est un préfaisceau d'anneau sur $(T_n)_{\text{syn}}$ et que m est un préfaisceau de a -modules tel que $m(U^\infty)$ est plat sur $a(U^\infty)$ pour tout U de la forme précédente, alors \mathcal{M} (faisceau associé à m) est plat sur \mathcal{A} (faisceau associé à a).*

Démonstration. Prouvons le premier point. Soit \mathcal{K} un faisceau sur $(T_n)_{\text{syn}}$. Comme $U^{i+1} \rightarrow U^i$ est un recouvrement log-syntomique, les morphismes de transition dans la limite inductive $\varinjlim_i \mathcal{K}(U^i)$ sont injectifs. Ainsi $\mathcal{K}(U)$ apparaît comme un sous-ensemble de $\mathcal{K}(U^\infty)$. On en déduit que si $\mathcal{K}(U^\infty) = 0$ pour tout U , alors $\mathcal{K} = 0$. Le premier énoncé de la proposition s'ensuit en considérant les faisceaux associés au noyau et au conoyau de α

Le second point ne pose pas de difficulté connaissant le premier, et le troisième est une simple vérification de la définition. \square

3.3.2 Calcul des faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$ et $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ sur le petit site syntomique

On garde les notations du paragraphe précédent. On note $D^{i,\text{cris}}$ l'enveloppe à puissances divisées (compatibles avec les puissances divisées canoniques sur pW_n) de l'immersion fermée exacte $U^i \hookrightarrow Y^i$ et $R^{i,\text{cris}}$ son anneau. Il est muni d'une filtration par les puissances divisées que l'on note $J^{i,[s],\text{cris}}$. En vertu de l'annulation de $\varinjlim_i \Gamma(Y^i, \Omega_{Y^i/W_n}^1)$, on obtient les égalités :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(U^\infty) &= \varinjlim_i R^{i,\text{cris}} = R^{\infty,\text{cris}} \\ \mathcal{J}_n^{[s],\text{cris}}(U^\infty) &= \varinjlim_i J^{i,[s],\text{cris}} = J^{\infty,[s],\text{cris}}. \end{aligned}$$

Du fait que le noyau de $B^i \rightarrow A^i$ est engendré par la suite régulière $E(x_0), f_1, \dots, f_t$, on déduit que le morphisme $Y_i \rightarrow \text{Spec}(W_n[x_0, f_1, \dots, f_t])$ est plat sur un voisinage de X_i puis par la proposition 3.21 de [BO78] (et un passage à la limite inductive) :

$$\mathcal{O}_n^{\text{cris}}(U^\infty) = R^{\infty,\text{cris}} = S_n \langle f_1, \dots, f_t \rangle \otimes_{W_n[x_0, f_1, \dots, f_t]} B^\infty \quad (4)$$

où x_0 est envoyé sur u dans S_n . De même, on a des descriptions des gradués de la filtration :

$$\frac{\mathcal{J}_n^{[s],\text{cris}}(U^\infty)}{\mathcal{J}_n^{[s+1],\text{cris}}(U^\infty)} = \frac{J^{\infty,[s],\text{cris}}}{J^{\infty,[s+1],\text{cris}}} = \bigoplus_{|\underline{m}|=s} \frac{B^\infty}{(E(x_0), f_1, \dots, f_t)} \gamma_{m_0}(E(x_0)) \gamma_{m_1}(f_1) \cdots \gamma_{m_t}(f_t) \quad (5)$$

où \underline{m} désigne un uplet (m_0, \dots, m_t) et où par définition $|\underline{m}| = m_0 + \dots + m_t$.

On procède de même pour le calcul de $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ en plongeant U^i dans le produit fibré $Y^i \times_{W_n} E_n$ qui est log-lisse sur E_n . Si l'on appelle D^i l'enveloppe à puissances divisées de cette immersion fermée (non exacte) et R^i son anneau muni de la filtration par les puissances divisées $J^{i,[s]}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n^{\text{st}}(U^\infty) &= \varinjlim_i R^i = R^\infty \\ \mathcal{J}_n^{[s]}(U^\infty) &= \varinjlim_i J^{i,[s]} = J^{\infty,[s]}. \end{aligned}$$

L'enveloppe à puissances divisées de $U^i \hookrightarrow Y^i \times_{W_n} E_n$ s'identifie à celle de $U^i \hookrightarrow Y^i \times_{W_n} V_n$. Pour calculer cette dernière, suivant les indications du paragraphe 5.5 de [Kat89], on construit une « exactification » $U^i \hookrightarrow Z^i \rightarrow Y^i \times_{W_n} V_n$ où le premier morphisme est une immersion fermée exacte et où le second est étale. L'enveloppe à puissances divisées recherchée sera alors l'enveloppe à puissances divisées classique de $U^i \hookrightarrow Z^i$.

On commence par exactifier le morphisme $T_n \rightarrow V'_n \times_{W_n} V_n$ défini par $x_0 \mapsto \pi$, $u \mapsto \pi$. Si P désigne le sous-monoïde de $\mathbb{Z}x_0 \oplus \mathbb{Z}u$ formé des $nx_0 + mu$ tels que $n + m \in \mathbb{N}$, il est clair que la factorisation recherchée s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N}u \oplus \mathbb{N}x_0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} x_0 \mapsto 1 \\ u \mapsto 1 \end{smallmatrix}} & \mathbb{N} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ W_n[x_0, u] & \longrightarrow & W_n[x_0, u] \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{N}^2]} \mathbb{Z}[P] & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} x_0 \mapsto 1 \\ u \mapsto 1 \end{smallmatrix}} & \mathcal{O}_K/p^n \end{array}$$

et le produit tensoriel $W_n[x_0, u] \otimes_{\mathbb{Z}[\mathbb{N}^2]} \mathbb{Z}[P]$ s'identifie à $W_n[x_0, X, \frac{1}{1+X}]$ où $1 + X$ est l'image de $(1, -1) \in P$. (Ainsi, dans cette nouvelle écriture, u vaut $\frac{x_0}{1+X}$.) Finalement l'exactification de $U^i \hookrightarrow Y^i \times_{W_n} E_n$ s'obtient en posant :

$$Z^i = (Y^i \times_{W_n} V_n) \times_{V'_n \times_{W_n} V_n} \left(\text{Spec } W_n \left[u, X, \frac{1}{1+X} \right], P \right).$$

En tant que schéma, on a $\dot{Z}^i = \text{Spec } C^i$ avec $C^i = B^i[X, \frac{1}{1+X}]$. En prenant les puissances divisées, on trouve la relation $R^i = R^{i, \text{cris}} \langle X \rangle$ puis en passant à la limite inductive :

$$\mathcal{O}_n^{\text{st}}(U^\infty) = \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(U^\infty) \langle X \rangle. \quad (6)$$

Notons $C^\infty = \varinjlim_i C_i$. Comme la suite $(X, E(u), f_1, \dots, f_t)$ est régulière dans C^i , le morphisme $\dot{Z}^i \rightarrow \text{Spec}(W_n[u, f_1, \dots, f_t, X])$ est plat sur un voisinage de \dot{U}^i . On en déduit des formules analogues à (4) et (5) :

$$\mathcal{O}_n^{\text{st}}(U^\infty) = R^\infty = S_n \langle f_1, \dots, f_t, X \rangle \otimes_{W_n[u, f_1, \dots, f_t, X]} C^\infty \quad (7)$$

$$\frac{\mathcal{J}_n^{[s]}(U^\infty)}{\mathcal{J}_n^{[s+1]}(U^\infty)} = \frac{J^{\infty, [s]}}{J^{\infty, [s+1]}} = \bigoplus_{|\underline{m}|=s} \frac{C^\infty}{(E(u), f_1, \dots, f_t, X)} \gamma_{m_0}(E(u)) \gamma_{m_1}(f_1) \cdots \gamma_{m_t}(f_t) \gamma_{m_{t+1}}(X). \quad (8)$$

On se souviendra également que sur la première des deux formules précédentes, le sous-module $\mathcal{J}_n^{[s]}(U^\infty)$ est engendré par les éléments $\gamma_{m_0}(E(u)) \gamma_{m_1}(f_1) \cdots \gamma_{m_t}(f_t) \gamma_{m_{t+1}}(X)$ pour $|\underline{m}| \geq s$.

Proposition 3.3.2. *Les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ sont plats sur S_n , et pour tout entier s les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ sont plats sur W_n .*

Démonstration. Comme le morphisme $\dot{Z}^i \rightarrow \text{Spec}(W_n[u, f_1, \dots, f_t, X])$ est plat sur un voisinage de \dot{U}^i , on est ramené à montrer les assertions correspondantes avec $S_n \langle f_1, \dots, f_t, X \rangle$ et son s -ième idéal à puissances divisées. C'est alors évident. \square

3.3.3 Calcul en caractéristique p

Lorsque $n = 1$, on a des formules analogues pour les faisceaux sur les bases $E_1, \tilde{E}, \tilde{E}_{(2)}$ (si $e \geq 2$) ou \bar{E} . Soient Υ l'une de ces bases et S_Υ son anneau. Pour simplifier les formules à venir posons :

$$\mathcal{A}_\Upsilon = \frac{C^\infty}{(f_1^p, \dots, f_t^p, X^p)} \otimes_{k[u]} S_\Upsilon \quad ; \quad \mathcal{B}_\infty = \frac{C^\infty}{(f_1, \dots, f_t, X)} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_n = \mathcal{B}_\infty / u^n \mathcal{B}_\infty.$$

On abrégera par la suite \mathcal{A}_{E_1} (resp. $\mathcal{A}_{\tilde{E}}$, resp. $\mathcal{A}_{\tilde{E}_{(2)}}$, resp. $\mathcal{A}_{\bar{E}}$) en \mathcal{A}_1 (resp. $\tilde{\mathcal{A}}$, resp. $\tilde{\mathcal{A}}_{(2)}$, resp. $\bar{\mathcal{A}}$). En appliquant les mêmes méthodes que précédemment à l'immersion fermée $U^i \hookrightarrow Y^i \times_{W_1} \Upsilon$ (resp. $U^i \times_{T_1} \bar{E} \hookrightarrow Y^i \times_k \bar{E}$ pour $\Upsilon = \bar{E}$), dont l'exactification est donnée par $Z^i \times_{V_1} \Upsilon$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}(U^\infty) &= S_\Upsilon \langle f_1, \dots, f_t, X \rangle \otimes_{k[u, f_1, \dots, f_t, X]} C^\infty \\ &= \bigoplus_m \mathcal{A}_\Upsilon \gamma_{pm_1}(f_1) \cdots \gamma_{pm_t}(f_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X). \end{aligned} \quad (9)$$

ainsi que des écritures pour les quotients $\mathcal{J}_\Upsilon^{[s]}(U^\infty) / \mathcal{J}_\Upsilon^{[s+1]}(U^\infty)$ que nous ne répétons pas.

Pour la suite, nous aurons besoin de raffiner la filtration à puissances divisées sur les faisceaux précédents. Exactement, nous posons la définition suivante :

Définition 3.3.3. Soit q un nombre rationnel de la forme $\frac{t}{e}$ où t est un entier positif ou nul. Si $t = se + \delta$ est la division euclidienne de t par e , on définit le préfaisceau :

$$j_\Upsilon^{[q]} = u^\delta \mathcal{J}_\Upsilon^{[s]} + \mathcal{J}_\Upsilon^{[s+1]}$$

et $\mathcal{J}_\Upsilon^{[q]}$ son faisceau associé.

Lorsque $\Upsilon = \bar{E}$, la multiplication par u annule les faisceaux $\bar{\mathcal{J}}^{[s]}$, d'où on a simplement $\mathcal{J}_\Upsilon^{[q]} = \mathcal{J}_\Upsilon^{[s]}$ où s est le plus petit entier supérieur ou égal à q . En gardant les notations de la définition, si on pose de même $J^{\infty, [q]} = u^\delta J^{\infty, [s]} + J^{\infty, [s+1]}$, on a $j_{\bar{E}_1}^{[q]}(U^\infty) = J^{\infty, [q]}$ et des égalités analogues pour les autres bases. On en tire les descriptions rassemblées dans le lemme suivant :

Lemme 3.3.4. Supposons que Υ soit l'une des bases E_1, \tilde{E} ou $\tilde{E}_{(2)}$ (si $e \geq 2$) et notons S_Υ l'anneau correspondant. Soient $q = s + \frac{\delta}{e}$ et $q' = s + \frac{\delta'}{e}$ avec s entier et $0 \leq \delta < \delta' \leq e$. Alors si $q' \leq \frac{n}{e}$ où n est le plus petit entier⁸ tel que $u^n = 0$ dans S_Υ , on a :

$$\frac{j_\Upsilon^{[q]}(U^\infty)}{j_\Upsilon^{[q']}(U^\infty)} = \bigoplus_{|m|=s} \mathcal{B}_{\delta' - \delta} u^{em_0 + \delta} f_1^{m_1} \cdots f_t^{m_t} X^{m_{t+1}}.$$

Lorsque $\Upsilon = \bar{E}$, on a pour $s \leq p - 1$

$$\frac{\bar{\mathcal{J}}^{[s]}(U^\infty)}{\bar{\mathcal{J}}^{[s+1]}(U^\infty)} = \bigoplus_{|m|=s} \mathcal{B}_1 f_1^{m_1} \cdots f_t^{m_t} X^{m_{t+1}}.$$

Démonstration. On se ramène facilement à montrer que la multiplication par $u^{\delta'}$ induit un isomorphisme entre $\mathcal{B}_{\delta' - \delta}$ et $u^\delta \mathcal{B}_\infty / u^{\delta'} \mathcal{B}_\infty$. Elle est clairement surjective. De plus comme la suite u^e, f_1, \dots, f_t est régulière dans C^∞ , l'élément u^e n'est pas diviseur de 0 dans \mathcal{B}_∞ . Ainsi u n'est pas non plus, ce qui assure l'injectivité. \square

Remarque. Il est possible d'écrire des formules (pas beaucoup plus compliquées) pour d'autres quotients de ce type, mais nous n'en aurons pas besoin par la suite.

⁸C'est-à-dire $n = ep$ si $\Upsilon = E_1$, $n = p$ si $\Upsilon = \tilde{E}$ et $n = 2p$ si $\Upsilon = \tilde{E}_{(2)}$.

Corollaire 3.3.5. Soient s et t des éléments de $\frac{1}{e}\mathbb{N}$ avec $s \leq t$.

Si $t \leq \frac{p}{e}$, le morphisme canonique $\mathcal{O}_1^{st} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{st}$ induit un isomorphisme de faisceaux sur $(T_1)_{\text{syn}}$:

$$\mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[t]} \simeq \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[t]}.$$

Si $e \geq 2$ et $t \leq \frac{2p}{e}$, alors la projection $\mathcal{O}_1^{st} \rightarrow \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{st}$ induit un isomorphisme :

$$\mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[t]} \simeq \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[t]}.$$

Démonstration. Lorsque t et s ont même partie entière, les isomorphismes résultent directement des descriptions précédentes. Dans le cas général, on procède par dévissage. \square

Corollaire 3.3.6. Soient Υ l'une des bases E_1, \tilde{E} ou $\tilde{E}_{(2)}$ (si $e \geq 2$) et S_Υ l'anneau correspondant. Soient $q = s + \frac{\delta}{e}$ avec s entier, $0 \leq \delta < e$ et $q < \frac{n}{e}$ (où n est défini comme dans le lemme 3.3.4). Alors la multiplication par u^δ induit un isomorphisme de faisceaux :

$$\mathcal{J}_\Upsilon^{[s]}/\mathcal{J}_\Upsilon^{[s+1/e]} \simeq \mathcal{J}_\Upsilon^{[q]}/\mathcal{J}_\Upsilon^{[q+1/e]}$$

On utilisera finalement un dernier lemme concernant cette filtration :

Lemme 3.3.7. Soient $k \in \{0, \dots, p-1\}$ (resp. $k \in \{0, \dots, 2p-1\}$) et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$. Notons s la partie entière de q . Alors on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow u^{k+1} \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \longrightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \longrightarrow u^{k+1} \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]} \longrightarrow u^k \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \longrightarrow 0).$$

Démonstration. Commençons par expliciter le morphisme $u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$. Pour cela, on construit un morphisme $u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$ et on montre par la suite que son image est contenue dans $\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$. Si $k = 0$, il est obtenu comme la restriction à $\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}$ de la projection canonique $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$. Si $k > 0$, on introduit K le noyau de la multiplication par u^k sur $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$. D'après les descriptions locales, K est inclus dans $u\tilde{\mathcal{O}}^{st}$ et donc s'envoie sur 0 sur $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$. Ainsi, on récupère une flèche $u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} \rightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}$ (qui correspond moralement à la division par u^k); elle fournit par restriction à $u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}$ le morphisme recherché.

Il s'agit maintenant de vérifier que celui-ci prend bien ses valeurs dans $\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}$ et qu'il conduit à la suite exacte annoncé. Comme dans la proposition 3.3.2, on est ramené à faire la vérification avec $\tilde{S}\langle f_1, \dots, f_t, X \rangle$ et $k\langle f_1, \dots, f_t, X \rangle$, ce qui ne pose alors plus de problème.

On procède pareillement pour la seconde suite exacte. \square

3.4 Les opérateurs

3.4.1 Le Frobenius

On rappelle en premier lieu que sur un log-schéma de caractéristique p , on définit le Frobenius absolu de la façon suivante : c'est le Frobenius absolu classique sur le schéma sous-jacent et la multiplication par p sur le monoïde. Par ailleurs, si n et m sont deux entiers avec $n \leq m$, on a un épaissement $i : T_n \hookrightarrow T_m$. Ainsi pour tout faisceau \mathcal{F} sur $(T_n)_{\text{syn}}$, on peut former le faisceau $i_*\mathcal{F}$ sur $(T_m)_{\text{syn}}$. Le foncteur i_* est exact (c'est une conséquence de la propriété 3.1.2) et, par abus, on note encore \mathcal{F} le faisceau $i_*\mathcal{F}$. L'exactitude assure qu'il revient au même de calculer les cohomologies de \mathcal{F} sur les sites $(T_n)_{\text{syn}}$ et $(T_m)_{\text{syn}}$.

Par platitude sur W_n (voir proposition 3.3.2), pour des entiers $n + i \leq m$, la multiplication par p^i identifie sur le site $(T_m)_{\text{syn}}$ les faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ et $p^i \mathcal{O}_{n+i}^{\text{st}}$ et de même le faisceau $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ (resp. $\mathcal{J}_n^{[s]}$) s'identifie à $\mathcal{O}_m^{\text{st}}/p^n$ (resp. $\mathcal{J}_m^{[s]}/p^n$) d'après les descriptions locales. Comme la base E_n est munie d'un relèvement du Frobenius (voir paragraphe 3.1.3), les groupes $\mathcal{O}_n^{\text{st}}(U) = H^0((U/E_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{U/E_n}) = H^0((U_1/E_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{U_1/E_n})$ (où $U_1 = U \times_{T_n} T_1$ est de caractéristique p et donc muni du Frobenius absolu) héritent d'un opérateur de Frobenius ϕ qui s'étend immédiatement en un morphisme de faisceaux $\phi : \mathcal{O}_n^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{st}}$.

Par ailleurs, pour tout entier positif ou nul $s \leq p - 1$, on a l'inclusion $\phi(\mathcal{J}_n^{[s]}) \subset p^s \mathcal{O}_n^{\text{st}}$. Ceci permet de définir un morphisme de faisceaux ϕ_s sur le site $(T_m)_{\text{syn}}$ (pour $m \geq n + s$) comme la composée :

$$\mathcal{J}_n^{[s]} \xleftarrow{\sim} \mathcal{J}_{n+s}^{[s]}/p^n \xrightarrow{\phi} p^s \mathcal{O}_{n+s}^{\text{st}} \xleftarrow{\sim}_{p^s} \mathcal{O}_n^{\text{st}}$$

après avoir vérifié que ϕ passe au quotient.

Remarque. Les faisceaux $\mathcal{J}_n^{[s]}$ et $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ sont définis sur le site $(T_n)_{\text{syn}}$ mais ϕ_s n'est, lui, défini que sur $(T_{n+s})_{\text{syn}}$.

Dans la suite, on aura besoin de comprendre comment les opérateurs ϕ et ϕ_s agissent au niveau des descriptions explicites calculées précédemment. Pour cela, en conservant les notations introduites jusqu'alors, on commence par définir un relevé du Frobenius sur Y^i . Comme ce dernier log-schéma est log-étale sur $\text{Spec}(W_n)[\mathbb{N}^{r+1}]$, il est suffisant de définir le relevé du Frobenius sur $\text{Spec}(W_n)[\mathbb{N}^{r+1}]$ et on prend alors simplement le Frobenius usuel sur W_n et la multiplication par p sur le monoïde \mathbb{N}^{r+1} . On obtient comme ceci un Frobenius $\phi : B^i \rightarrow B^i$ tel que $\phi(x_i) = x_i^r$ pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$ et dont la réduction de ϕ modulo p n'est autre que l'élevation à la puissance p . Ce Frobenius s'étend finalement à $C^i = B_i[X, \frac{1}{1+X}]$ (et à Z^i) simplement en posant $\phi(X) = (1 + X)^p - 1$ (ou si l'on préfère $\phi(1 + X) = (1 + X)^p$).

Le calcul de ϕ_s est, quant à lui, légèrement plus délicat à mener puisqu'il demande de relever l'argument modulo p^{n+s} . Toutefois, s'il l'on prend bien garde à choisir ce relevé dans la s -ième puissance divisée, il n'y a aucun piège : on applique ϕ à cet élément, on divise par p^s et on réduit modulo p^n . Malgré tout, lorsque $s < p - 1$ et $n = 1$, l'application ϕ_s est entièrement déterminée par ϕ_1 (en particulier, elle est définie sur $(T_2)_{\text{syn}}$) de la façon suivante. Tout d'abord comme ϕ_1 s'annule sur $\mathcal{J}_1^{[2]}$, il définit par passage au quotient un morphisme de faisceaux (sur le site $(T_2)_{\text{syn}}$) $\mathcal{J}_1^{[1]}/\mathcal{J}_1^{[2]} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}}$. En outre, on a le lemme suivant :

Lemme 3.4.1. *Supposons $s \leq p - 1$. Le morphisme de faisceaux canoniques $\text{Sym}_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_1^{[1]}/\mathcal{J}_1^{[2]} \rightarrow \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de la formule (8) après avoir remarqué que $\mathcal{O}_1(U^\infty) = \frac{C^\infty}{(E(u), f_1, \dots, f_t, X)}$. \square

Lorsque $s < p - 1$, l'application ϕ_s s'obtient alors comme la composée :

$$\mathcal{J}_1^{[s]} \longrightarrow \mathcal{J}_1^{[s]}/\mathcal{J}_1^{[s+1]} \xrightarrow{\text{Sym}^s \phi_1} \mathcal{O}_1^{\text{st}}.$$

On prendra garde cependant au fait que lorsque $s = p - 1$, les deux applications ϕ_{p-1} et $\text{Sym}^{p-1} \phi_1$ sont définies mais ne coïncident pas !

3.4.2 La monodromie

On munit en outre $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ d'un opérateur N défini comme dans le paragraphe 3.5 de [HK94] (à un signe près). Rappelons brièvement sa construction. Soient $V_n(1) = V_n \times_{W_n} V_n$ et $E_n(1)$ l'enveloppe à puissances divisées de l'immersion fermée $T_n \hookrightarrow V_n(1)$. On définit le faisceau $\mathcal{O}_n^{\text{st}}(1)$ par la formule :

$$\mathcal{O}_n^{\text{st}}(1)(U) = H^0((U/E_n(1))_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{U/E_n(1)}).$$

On a des morphismes $\text{pr}_1^*, \text{pr}_2^* : \mathcal{O}_n^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{st}}(1)$ induits par les projections canoniques $E_n(1) \rightarrow E_n$ et comme on a montré (6), on prouve que pr_1^* induit un isomorphisme $\mathcal{O}_n^{\text{st}} \langle Y \rangle \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{st}}(1)$ où l'élément $Y \in \mathcal{O}_n^{\text{st}}(1)$ est défini par la relation $(1+Y)\text{pr}_1^*(u) = \text{pr}_2^*(u)$ vérifiée dans $\Gamma(E_n(1), M_{E_n(1)})$. Ainsi pour toute section locale x de $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$, on a une écriture unique de $\text{pr}_2^*(x)$ sous la forme :

$$\sum_{m \geq 0} \text{pr}_1^*(x_m) \gamma_m(U)$$

avec x_m section locale de $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$. La définition de l'opérateur N est finalement $N(x) = -x_1$. On montre facilement que N vérifie la loi de Leibniz, qu'il est compatible au N de S_n et qu'il est nul sur le sous-faisceau $\mathcal{O}_n^{\text{cris}}$. De plus, en reprenant les notations de la formule (6), sur U^∞ , on a $x_0 = u(1+X)$ d'où en appliquant N , on tire $uN(X) = u(1+X)$ puisque $N(u) = -u$ par définition et $N(x_0) = 0$ du fait que $x_0 \in \mathcal{O}_n^{\text{cris}}(U^\infty)$. Comme ceci est valable pour tout n , il reste $N(X) = 1+X$. De ces descriptions, il découle directement la proposition suivante :

Proposition 3.4.2. *Pour tous entiers $s \geq 0$ et $n \geq 1$, on a une suite exacte de faisceaux sur le site $(T_n)_{\text{syn}}$:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[s], \text{cris}} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[s]} \xrightarrow{N} \mathcal{J}_n^{[s-1]} \longrightarrow 0.$$

Mentionnons finalement la relation de commutation $N\phi_s = \phi_{s-1}N$ valable pour tout entier $s \leq p-1$. Sa vérification ne pose pas de réelle difficulté. De $\phi(1+X) = (1+X)^p$, de $N(\mathcal{O}_n^{\text{cris}}) = 0$, de $N(1+X) = 1+X$ et des conditions de « linéarité » satisfaites par les opérateurs ϕ et N , on dérive la relation $N\phi = p\phi N$, de laquelle il découle directement la formule annoncée.

3.4.3 Sur les autres bases

Soit Υ l'une des bases $\tilde{E}_{(2)}$ (si $e \geq 2$), \tilde{E} ou \bar{E} et S_Υ son anneau. À partir des formules obtenues en 3.3.3, on montre que l'on a un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{O}_1^{\text{st}} \otimes_{S_1} S_\Upsilon \simeq \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$$

qui permet de définir N sur $\mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$ par la formule $N \otimes \text{id} + \text{id} \otimes N$.

De même, supposons que Υ soit l'une des bases $\tilde{E}_{(2)}$ (si $e \geq 2$) ou \tilde{E} , et posons $n = 2$ dans le premier cas et $n = 1$ dans le second. Les formules explicites obtenues en 3.3.3 montrent que si $es \leq np$, on a :

$$\mathcal{J}_\Upsilon^{[s]} \simeq \frac{\mathcal{J}_1^{[s]}}{(\text{Fil}^p S_1 + u^{np} S_1) \mathcal{O}_1^{\text{st}}}.$$

Lorsque $s < p-1$ et $es \leq np - n$, on a en outre l'inclusion $\phi_s(\text{Fil}^p S_1 + u^{np} S_1) \subset \text{Fil}^p S_1 + u^{np} S_1$ de laquelle on déduit que l'opérateur ϕ_s passe au quotient, définissant ainsi un morphisme $\mathcal{J}_\Upsilon^{[s]} \rightarrow \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$ encore noté ϕ_s .

3.5 Les faisceaux « car »

Soit Υ l'une des bases $E_1, \tilde{E}_{(2)}$ (si $e \geq 2$), \tilde{E} ou \bar{E} . Dans les trois premiers cas, on pose $\tilde{\Upsilon} = T_1$ et dans le dernier $\tilde{\Upsilon} = \bar{E}$.

Soit U un log-schéma fin (localement de présentation finie) sur T_1 . Le log-schéma $\bar{U} = U \times_{T_1} \tilde{\Upsilon}$ est muni d'un morphisme vers Υ . On note $\bar{U}' = \bar{U} \times_{\Upsilon} \Upsilon$ où Υ est vu sur lui-même par le morphisme de Frobenius absolu. On note $f_{\bar{U}} : \bar{U} \rightarrow \bar{U}'$ le Frobenius relatif. Dans la terminologie de Kato (voir [Kat89], paragraphe 4.9), c'est un morphisme faiblement purement inséparable et d'après le théorème 4.10 de *loc. cit.*, il se factorise de façon *unique* sous la forme :

$$f_{\bar{U}} : \bar{U} \rightarrow \bar{U}'' \rightarrow \bar{U}'$$

où le premier morphisme est purement inséparable et le second est log-étale. Ceci permet de définir, comme dans le paragraphe 2.2.1 de [Bre98], le préfaisceau $\mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}}$ par l'association :

$$\mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}}(U) = \Gamma(\bar{U}'', \mathcal{O}_{\bar{U}''}).$$

On prouve (voir appendice B de [Bre98]) que ceci fournit en fait un faisceau sur le gros site $(T_1)_{\text{SYN}}$. Il est muni d'un morphisme $\mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}} \rightarrow \mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{st}}$ que l'on construit comme suit. Soit $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{T}$ un objet de $(U/\tilde{\Upsilon})_{\text{CRIS}}$. L'idéal de $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}$ qui définit \mathcal{U} est muni de puissances divisées et donc sa puissance p -ième est nulle. On en déduit que le Frobenius absolu de \mathcal{T} s'écrit comme une composée $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{T}$ (où la seconde flèche est celle dont on est parti). Introduisons les log-schémas \mathcal{U}' et \mathcal{U}'' définis à partir de \mathcal{U} de la même façon que ne l'étaient \bar{U}' et \bar{U}'' à partir de \bar{U} . Par propriété universelle du produit fibré le morphisme $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}$ se factorise sous la forme $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$ et on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U}'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{U}' \end{array}$$

où le morphisme de gauche est purement inséparable et celui de droite log-étale. Ainsi, par le lemme 4.11 de [Kat89], il existe une unique flèche $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{U}''$ factorisant le diagramme, que l'on peut composer avec le morphisme $\mathcal{U}'' \rightarrow \mathcal{U}''$ provenant par functorialité de la flèche $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ (donnée par hypothèse). Cette composée induit sur les sections globales une application $\mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}}(U) \rightarrow \Gamma(\mathcal{T}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}})$. Par passage à la limite projective, on en déduit un morphisme $\mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}}(U) \rightarrow \mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{st}}(U)$ comme souhaité.

Il est encore possible de donner une description locale explicite du faisceau $\mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}}$ sur le petit site $(T_1)_{\text{syn}}$. Considérons un log-schéma U log-syntomique sur T_1 qui a la forme décrite en 3.3.1. On reprend aussi les autres notations de cette partie, en particulier les log-schémas U^i, Y^i et Z^i . On pose $\bar{U}^i = U^i \times_{T_1} \tilde{\Upsilon}$. On considère $\bar{U}^i \rightarrow \bar{U}'''^i \rightarrow \bar{U}''^i$ et $Z^i \rightarrow Z'''^i \rightarrow Z''^i$ les factorisations données par le théorème 4.10 de [Kat89] des Frobenius relatifs de $\bar{U}^i/\tilde{\Upsilon}$ et Z^i/V_1 . On dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \bar{U}'''^i & \longrightarrow & \bar{U}''^i & \longrightarrow & \bar{U}^i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z'''^i \times_{V_1} \Upsilon & \longrightarrow & Z''^i \times_{V_1} \Upsilon & \longrightarrow & Z^i \times_{V_1} \Upsilon \end{array}$$

où les deux carrés sont cartésiens. Notons $C''^\infty = \varinjlim_i \Gamma(Z''^i, \mathcal{O}_{Z''^i})$. De $\phi(\text{Fil}^1 S_\Upsilon) = 0$ (où S_Υ est l'anneau de Υ), on déduit :

$$\mathcal{O}_\Upsilon^{\text{car}}(U^\infty) = \frac{C''^\infty}{(f_1'', \dots, f_t'', X'')} \otimes_{k[u]} S_\Upsilon$$

où les f_i'' et X'' sont les images des f_i et X par le morphisme $C^\infty \rightarrow C''^\infty$ déduit de $Z''^i \rightarrow Z^i \rightarrow Z^i$. Par le théorème 4.12 de [Kat89] et l'annulation de $\lim_i \Gamma(Z^i, \Omega_{Z^i/V_1}^1)$, le Frobenius relatif $f_{C^\infty} : C''^\infty \rightarrow C^\infty$ est un isomorphisme. Ainsi :

$$\mathcal{O}_\Upsilon^{\text{car}}(U^\infty) \simeq \frac{C^\infty}{(f_1^p, \dots, f_t^p, X^p)} \otimes_{k[u]} S_\Upsilon = \mathcal{A}_\Upsilon. \quad (10)$$

Théorème 3.5.1. *Soit s un entier vérifiant $es \leq p - 1$. Soit Υ l'une des bases $E_1, \tilde{E}_{(2)}$ (si $e \geq 2$), \tilde{E} ou \bar{E} . Soit $\Upsilon' = \Upsilon$ dans les trois premiers cas, et $\Upsilon' = \tilde{E}$ dans le dernier. Soit n un entier qui vaut e dans le premier cas, 2 dans le second, et 1 dans les deux derniers. Alors, le morphisme de faisceaux⁹ :*

$$\mathcal{O}_\Upsilon^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1/\pi^n \mathcal{O}_1} \mathcal{J}_{\Upsilon'}^{[s]} / \mathcal{J}_{\Upsilon'}^{[s+n/e]} \xrightarrow{\text{id} \otimes (\text{Sym}^s \phi_1)} \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$$

est injectif et le préfaisceau image du préfaisceau produit tensoriel, noté $f'_s \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$, vérifie¹⁰ :

$$f'_s \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}(U^\infty) = \bigoplus_{|\underline{m}| \leq s} \mathcal{A}_\Upsilon \gamma_{pm_1}(f_1) \cdots \gamma_{pm_t}(f_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X).$$

Remarques. Le corollaire 3.3.5 montre que le quotient $\mathcal{J}_{\Upsilon'}^{[s]} / \mathcal{J}_{\Upsilon'}^{[s+n/e]}$ s'identifie à $\mathcal{J}_1^{[s]} / \mathcal{J}_1^{[s+n/e]}$, alors que le lemme 3.4.1 assure qu'il est légitime d'appliquer $\text{Sym}^s \phi_1$ à $\mathcal{J}_1^{[s]} / \mathcal{J}_1^{[s+1]}$. La semi-linéarité de ϕ_1 implique que $\text{Sym}^s \phi_1$ s'annule sur $\mathcal{J}_1^{[s+n/e]}$ et donc finalement que l'application qui apparaît dans l'énoncé du théorème est bien définie.

Lorsque $s < p - 1$ (ce qui est automatique si $e > 1$), les lignes qui suivent la démonstration du lemme 3.4.1 disent exactement que l'on peut remplacer $\text{Sym}^s \phi_1$ par ϕ_s dans l'énoncé du théorème.

Démonstration. Nous ne donnons la preuve que pour le cas de la base E_1 , les autres se traitent de même.

Soit U_2 un log-schéma log-syntomique sur T_2 ayant la forme décrite en 3.3.1. On note A_2^∞ , B_2^∞ et C_2^∞ les anneaux associés à U_2 et A^∞ , B^∞ et C^∞ leurs réductions modulo p . On a les descriptions locales suivantes :

$$\mathcal{O}_1(U_2^\infty) = A^\infty = \frac{C^\infty}{(u^e, f_1, \dots, f_t, X)} = \mathcal{B}_e \quad ; \quad \mathcal{O}_1^{\text{car}}(U_2^\infty) = \mathcal{A}_1$$

$$\mathcal{J}_1^{[s]}(U_2^\infty) / \mathcal{J}_1^{[s+1]}(U_2^\infty) = \bigoplus_{|\underline{m}| \leq s} \mathcal{B}_e u^{e(s-|\underline{m}|)} f_1^{m_1} \cdots f_t^{m_t} X^{m_{t+1}}$$

⁹On fait remarquer que bien que la source et le but soient des faisceaux définis sur $(T_1)_{\text{syn}}$, le morphisme lui n'est défini que sur $(T_2)_{\text{syn}}$.

¹⁰À comparer avec la description de $\tilde{\mathcal{O}}_\Upsilon^{\text{st}}$ donnée en (9).

$$\mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty) = \bigoplus_{\underline{m}} \mathcal{A}_1 \gamma_{pm_1}(f_1) \cdots \gamma_{pm_t}(f_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X)$$

données par les formules (9) et (10) et le lemme 3.3.4.

Pour conclure, d'après la proposition 3.3.1, il suffit de montrer que les deux modules $\mathcal{O}_1^{\text{car}}(U_2^\infty) \otimes_{\mathcal{B}_e} \mathcal{J}_1^{[s]}(U_2^\infty) / \mathcal{J}_1^{[s+1]}(U_2^\infty)$ et $f'_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U_2^\infty)$ sont isomorphes par le morphisme $\text{id} \otimes (\text{Sym}^s \phi_1)$. Ce sont tous les deux des \mathcal{A}_1 -modules libres dont une base est indexée par les familles $\underline{m} = (m_1, \dots, m_{t+1})$ telles que $|\underline{m}| \leq s$. Il suffit donc de montrer que la matrice de $\text{id} \otimes (\text{Sym}^s \phi_1)$ dans ces bases est inversible. On est ainsi amené à calculer $\phi_1(u^e)^{m_0} \phi_1(f_1)^{m_1} \cdots \phi_1(f_t)^{m_t} \phi_1(X)^{m_{t+1}}$ (avec $m_0 = s - |\underline{m}|$). Pour calculer les images par ϕ_1 , on doit relever l'argument dans :

$$\mathcal{J}_2^{[1]}(U_2^\infty) = \text{Fil}^1(S_2 \langle f_1, \dots, f_t, X \rangle \otimes_{W_2[u, f_1, \dots, f_t, X]} C_2^\infty)$$

appliquer le Frobenius, diviser par p puis réduire modulo p . Pour l'élément X , on choisit le relevé X qui s'envoie au final sur $-\gamma_p(X) + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{n}{p} X^n$. Pour u^e , on choisit le relevé $E(u)$ et on obtient $\phi_1(u^e) = c$ qui est inversible dans S_1 . Pour f_i , on choisit le relevé f_i et de $\phi(f_i) = f_i^p + pg_i$ avec $g_i \in C_2^\infty$, on déduit $\phi_1(f_i) = -\gamma_p(f_i) + g_i$. Au final, on obtient une écriture de la forme :

$$\begin{aligned} \phi_1(u^e)^{m_0} \phi_1(f_1)^{m_1} \cdots \phi_1(f_t)^{m_t} \phi_1(X)^{m_{t+1}} &= (-1)^{s-m_0} c^{m_0} \gamma_p(f_1)^{m_1} \cdots \gamma_p(f_t)^{m_t} \gamma_p(X)^{m_{t+1}} + g \\ &= \alpha c^{m_0} \cdot \gamma_{pm_1}(f_1) \cdots \gamma_{pm_t}(f_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X) + g \end{aligned}$$

où α est un inversible de \mathbb{Z}_p et où g n'a que des composantes non nulles sur les éléments de la base indexés par les \underline{m}' pour lesquels $|\underline{m}'| < |\underline{m}|$. On en déduit que la matrice de $\text{id} \otimes (\text{Sym}^s \phi_1)$ est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont inversibles (déjà dans S_1). Ainsi, elle est inversible comme voulu. \square

4 Calcul de la cohomologie cristalline

On conserve encore les notations et hypothèses précédentes (notamment sur X et r — c'est-à-dire $r > 0$ et $er < p - 1$) et on montre, que pour tout entier n et tout entier $i < r$, les quadruplets :

$$(H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$$

sont des objets (tués par p^n) de la catégorie \mathcal{M}^r . On fait remarquer une fois de plus que le morphisme ϕ_r n'est défini que sur $(X_{n+r})_{\text{syn}}$. Toutefois, l'écriture précédente du quadruplet est légitime car on dispose d'isomorphismes canoniques entre $(H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}))$ et $(H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}))$ d'une part et $(H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}))$ et $(H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}))$ d'autre part.

On commence par traiter le cas $n = 1$ (sous-partie 4.1) où la conclusion demeure même pour $i = r$. On procède ensuite par dévissage avant de passer un passage à la limite projective pour proposer une version entière (sous-partie 4.2).

4.1 En caractéristique p

Nous montrons que, pour tout $i \leq r$, les quadruplets :

$$(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_\Upsilon^{[r]}), \phi_r, N)$$

définissent des objets de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ et \mathcal{M}^r lorsque Υ vaut successivement \tilde{E} , $\tilde{E}_{(2)}$ et E_1 . La conclusion qui nous intéresse est l'énoncé qui concerne la base E_1 mais nous avons besoin,

pour l'établir, de passer par les deux étapes préliminaires. Ce plan de preuve ne fonctionne que lorsque $e \geq 2$, mais lorsque $e = 1$, c'est encore plus facile puisque l'on peut passer directement de E_1 à \tilde{E} comme cela est fait dans le paragraphe 2.2.4 de [Bre98].

Les deux premiers paragraphes 4.1.1 et 4.1.2 aboutissent à l'assertion sur la base \tilde{E} : le premier est consacré à la liberté de $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ et le second termine la preuve. Le troisième paragraphe 4.1.3 explique comment le théorème « se remonte » à la base E_1 .

4.1.1 Liberté des groupes de cohomologie

De façon générale, pour prouver que $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{st}})$ est libre sur S_{Υ} (l'anneau de Υ), la stratégie consiste à déduire du théorème 3.5.1 des isomorphismes sur les groupes de cohomologie. Exactement, nous nous proposons de prouver dans ce paragraphe le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *Soient Υ l'une des bases $E_1, \tilde{E}_{(2)}$ (si $e \geq 2$), \tilde{E} ou \bar{E} et S_{Υ} son anneau. Soit $\Upsilon' = \Upsilon$ dans les trois premiers cas et $\Upsilon' = \tilde{E}$ dans le dernier. Soit s un entier vérifiant $es \leq p - 1$. Soit n un entier qui vaut e dans le premier cas, 2 dans le second, et 1 dans les deux derniers. Alors, pour tout $i \leq s$, on a un isomorphisme :*

$$S_{\Upsilon} \otimes_{k[u]/u^n} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_{\Upsilon'}^{[s]} / \mathcal{J}_{\Upsilon'}^{[s+n/e]}) \xrightarrow[\sim]{id \otimes (\text{Sym}^s \phi_1)} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{st}})$$

où S_{Υ} est vu sur $k[u]/u^n$ par le Frobenius $u^j \mapsto u^{pj}$.

Remarque. Encore une fois, si $s < p - 1$, le lemme 3.4.1 ainsi que ce qui le suit montre que l'on peut remplacer $\text{Sym}^s \phi_1$ par ϕ_s dans le théorème.

Corollaire 4.1.2. *Le module $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est libre sur \tilde{S} .*

Démonstration. C'est clair à partir du théorème 4.1.1 puisque $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]})$ est évidemment libre sur k . \square

Pour prouver le théorème 4.1.1, nous démontrons successivement que les modules dans chacun des deux membres de l'isomorphisme sont obtenus en prenant la cohomologie des deux membres de l'isomorphisme du théorème 3.5.1.

Le membre de gauche : projection sur le site étale. Pour le membre de gauche, une méthode, déjà utilisée dans [Bre98], consiste à projeter les faisceaux sur le site étale. On dispose pour cela d'un morphisme de topoi :

$$\alpha : \widetilde{(X_1)_{\text{SYN}}} \rightarrow \widetilde{(X_1)_{\text{ét}}}$$

défini de la façon suivante : si \mathcal{F} est un faisceau sur $(X_1)_{\text{SYN}}$, on définit $\alpha_{\star} \mathcal{F}$ comme la restriction de \mathcal{F} au site $(X_1)_{\text{ét}}$, et on vérifie que l'on obtient ainsi un faisceau pour la topologie étale. Réciproquement si \mathcal{F} est un faisceau sur $(X_1)_{\text{ét}}$, on définit $\alpha^* \mathcal{F}$ comme le faisceau associé (pour la topologie syntomique) au préfaisceau \mathcal{F} étendu au gros site.

Si Γ_{SYN} (resp. $\Gamma_{\text{ét}}$) désigne le foncteur des sections globales pour la topologie syntomique (resp. étale), on a évidemment la relation $\Gamma_{\text{SYN}} = \Gamma_{\text{ét}} \circ \alpha_{\star}$ d'où $R\Gamma_{\text{SYN}} = R\Gamma_{\text{ét}} \circ R\alpha_{\star}$. Ainsi pour calculer la cohomologie syntomique d'un faisceau, il suffit de calculer le $R\alpha_{\star}$ de ce faisceau puis de déterminer l'hypercohomologie étale du complexe obtenu. C'est ce que nous allons faire.

Pour calculer les $R\alpha_{\star}$ des faisceaux précédemment introduits, on aimerait utiliser les résolutions de Berthelot et Kato. Pour cela, il nous faut travailler avec le *site cristallin-syntomique* sur

X_1/Υ . Il est obtenu en munissant la catégorie sous-jacente au site cristallin sur X_1/Υ de la topologie syntomique : il s'agit donc d'une catégorie de couples $(U \hookrightarrow T)$ et on convient qu'une famille de couples $(U_i \hookrightarrow T_i)$ recouvre $(U \hookrightarrow T)$ si les T_i forment un recouvrement log-syntomique de T et si les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & T_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & T \end{array}$$

sont cartésiens. Bien entendu, selon que l'on considère la catégorie sous-jacente au petit site cristallin sur X_1/Υ ou au grand, on obtient respectivement les petit et grand sites cristallin-syntomiques sur X_1/Υ . On les note $(X_1/\Upsilon)_{\text{syn-cris}}$ et $(X_1/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$. Par les résultats de [Bre96] (lemme 3.3.1), on a des morphismes de topoi entre les différents catégories de faisceaux sur les sites précédents comme le résume le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{(X_1/\Upsilon)}_{\text{SYN-CRIS}} & \xrightarrow{v} & \widetilde{(X_1/\Upsilon)}_{\text{CRIS}} \\ \downarrow w & & \downarrow u \\ \widetilde{(X_1)}_{\text{SYN}} & \xrightarrow{\alpha} & \widetilde{(X_1)}_{\text{ét}} \end{array}$$

Soit \mathcal{F} un faisceau sur un des sites $(X_1/\Upsilon)_{\text{CRIS}}$, $(X_1/\Upsilon)_{\text{cris}}$, $(X_1/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$ ou $(X_1/\Upsilon)_{\text{syn-cris}}$. Pour tout T apparaissant dans un couple de la forme $(U \hookrightarrow T)$, on sait que \mathcal{F} définit un faisceau $\mathcal{F}_{|U \hookrightarrow T}$ sur $T_{\text{ét}}$ dans les deux premiers cas et T_{syn} dans les deux derniers. On dit que \mathcal{F} est à *composantes quasi-cohérentes* si tous les faisceaux $\mathcal{F}_{|U \hookrightarrow T}$ sont des \mathcal{O}_T -modules quasi-cohérents. On montre (en adaptant la preuve du lemme 3.3.2 de [Bre96]) que si \mathcal{F} est un faisceau à composantes quasi-cohérentes sur $(X_1/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$, alors $R^i v_* \mathcal{F} = 0$ pour tout $i \geq 1$. Autrement dit $Rv_* \mathcal{F} \simeq v_* \mathcal{F}$. De même, par un calcul de Čech, on prouve (voir [Bre98], appendice C.1) que $Rw_* \mathcal{F} \simeq w_* \mathcal{F}$ (toujours en supposant que \mathcal{F} est à composantes quasi-cohérentes).

Par ailleurs, on définit sur le site $(X_1/\Upsilon)_{\text{SYN-CRIS}}$ (resp $(X_1/\Upsilon)_{\text{syn-cris}}$) un faisceau $\mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}}$ en posant $\mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}}(U \hookrightarrow T) = \mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}}(U)$ (où le deuxième $\mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}}$ est celui défini en 3.5). Grâce aux foncteurs u_* , v_* et w_* , ces faisceaux vivent également sur les sites $(X_1/\Upsilon)_{\text{CRIS}}$, $(X_1/\Upsilon)_{\text{cris}}$ et $(X_1)_{\text{ét}}$.

En utilisant les théorèmes de comparaison entre cohomologie cristalline et de de Rham (voir théorème 6.4 de [Kat89]) et en raisonnant comme dans l'appendice B de [Bre98] on montre le théorème suivant :

Théorème 4.1.3. *Soient Υ l'une des bases $E_1, \tilde{E}_{(2)}$ (si $e \geq 2$) ou \tilde{E} et S_{Υ} son anneau associé. Soit $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$. Notons s la partie entière de q et $\delta = e(q - s)$. Supposons que l'on dispose d'une Υ -immersion fermée $X_1 \hookrightarrow Y$ avec Y log-lisse sur Υ . Soit D l'enveloppe à puissances divisées de X_1 dans Y . Alors :*

$$R\alpha_* \mathcal{J}_{\Upsilon}^{[q]} = (u^{\delta} \mathcal{J}_D^{[s]} + \mathcal{J}_D^{[s+1]}) \rightarrow (u^{\delta} \mathcal{J}_D^{[s-1]} + \mathcal{J}_D^{[s]}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\Upsilon}^1 \rightarrow (u^{\delta} \mathcal{J}_D^{[s-2]} + \mathcal{J}_D^{[s-1]}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\Upsilon}^2 \rightarrow \dots$$

$$R\alpha_* \left(\mathcal{O}_{\Upsilon}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_{\Upsilon}^{[s]} / \mathcal{J}_{\Upsilon}^{[q]} \right) = S_{\Upsilon} \otimes_{(\phi), S_{\Upsilon}} \frac{\mathcal{J}_D^{[s]} / \mathcal{J}_D^{[s+1]}}{u^{\delta} (\mathcal{J}_D^{[s]} / \mathcal{J}_D^{[s+1]})} \rightarrow \left(S_{\Upsilon} \otimes_{(\phi), S_{\Upsilon}} \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]} / \mathcal{J}_D^{[s]}}{u^{\delta} (\mathcal{J}_D^{[s-1]} / \mathcal{J}_D^{[s]})} \right) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\Upsilon}^1 \rightarrow \dots$$

et si $q = s + \frac{1}{e}$:

$$R\alpha_* \left(\bar{\mathcal{O}}^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1/u\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_\Upsilon^{[s]} / \mathcal{J}_\Upsilon^{[s+1/e]} \right) = k \otimes_{(\phi),k} \frac{\mathcal{J}_D^{[s]} / \mathcal{J}_D^{[s+1]}}{u(\mathcal{J}_D^{[s]} / \mathcal{J}_D^{[s+1]})} \rightarrow \left(k \otimes_{(\phi),k} \frac{\mathcal{J}_D^{[s-1]} / \mathcal{J}_D^{[s]}}{u(\mathcal{J}_D^{[s-1]} / \mathcal{J}_D^{[s]})} \right) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/\Upsilon}^1 \rightarrow \dots$$

Remarques. Pour prouver la dernière égalité, il faut introduire le faisceau $\mathcal{O}_{\tilde{E}}^{\text{car}}$ sur le site $(X_1/\tilde{E})_{\text{SYN-CRIS}}$: pour cela, on remarque simplement que la formule qui le définit sur $(X_1/\tilde{E})_{\text{SYN-CRIS}}$ reste valable.

Le faisceau $\mathcal{O}_\Upsilon^{\text{car}}$ n'apparaît pas dans les résolutions car il se simplifie du fait que X_1 est du type de Cartier sur T_1 .

La première résolution peut être utilisée pour évaluer $\mathcal{J}_\Upsilon^{[q]}(U^\infty)$: on trouve alors la même formule que pour $j_\Upsilon^{[q]}(U^\infty)$. Toutefois, nous n'aurons pas à utiliser ce résultat par la suite.

Corollaire 4.1.4. *On conserve les notations précédentes et on reprend celles du théorème 4.1.1. Pour tout entier i , on a une identification canonique :*

$$H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{car}} \otimes_{\mathcal{O}_1/\pi^n\mathcal{O}_1} \mathcal{J}_{\Upsilon'}^{[s]} / \mathcal{J}_{\Upsilon'}^{[s+n/e]}) \simeq S_\Upsilon \otimes_{(\phi),k[u]/u^n} H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_{\Upsilon'}^{[s]} / \mathcal{J}_{\Upsilon'}^{[s+n/e]}).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 4.1.3 après avoir remarqué que $\phi : k[u]/u^n \rightarrow S_\Upsilon$ fait de S_Υ un module plat sur $k[u]/u^n$. \square

Le membre de droite. Rappelons que l'on a introduit dans l'énoncé du théorème 3.5.1 un préfaisceau $f'_s \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$. Si on note $\mathcal{F}'_s \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$ son faisceau associé, il ne reste plus pour terminer la preuve du théorème 4.1.1 qu'à montrer que l'inclusion $\mathcal{F}'_s \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}} \hookrightarrow \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$ induit un isomorphisme sur les H^i pour $i \leq s$. Dans une version préliminaire de ce texte, l'auteur avait recopié la méthode de [Bre98] sans voir que celle-ci contenait une erreur¹¹. L'auteur remercie le referee d'une part d'avoir été suffisamment attentif pour remarquer cette erreur et d'autre part de lui avoir fourni la démonstration correcte — nous l'espérons — présentée ci-dessous.

On traite d'abord complètement le cas de la base E_1 , et on donnera à la fin quelques indications pour les autres bases. On commence par définir pour tout entier n des faisceaux $\mathcal{O}_n^{\text{car}}$ sur le site $(T_n)_{\text{SYN}}$. Pour cela, on considère $U_n \in (T_n)_{\text{SYN}}$ et on note $U_1 = U_n \times_{T_n} T_1$ ainsi que $U_1 \rightarrow U'_1 \rightarrow U''_1$ la factorisation du Frobenius relatif de U_1/E_1 comme la composée d'un morphisme purement inséparable et d'un morphisme log-étale. Notons $U'_n = U_n \times_{E_n} E_n$ où E_n est vu sur lui-même par le Frobenius défini en 3.1.3. Le morphisme $U'_1 \hookrightarrow U''_1$ est une immersion fermée exacte, d'où on déduit l'existence d'un unique U''_n log-étale sur U_n rendant le diagramme suivant cartésien :

$$\begin{array}{ccc} U''_1 & \hookrightarrow & U''_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ U'_1 & \hookrightarrow & U'_n \end{array}$$

On définit le préfaisceau σ_n^{car} par la formule $\sigma_n^{\text{car}}(U_n) = \Gamma(U''_n, \mathcal{O}_{U''_n})$ et $\mathcal{O}_n^{\text{car}}$ comme le faisceau associé pour la topologie log-syntomique.

¹¹Précisément dans la preuve de la proposition 2.2.2.2 de [Bre98], Breuil utilise que le noyau de $\phi : \mathcal{O}_1^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ est $\mathcal{J}_1^{[1]}$ alors que celui-ci est plus gros.

Il est probable que σ_n^{car} soit déjà un faisceau mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat pour la suite. Toutefois, lorsque $n = 1$, on a vu que $\mathcal{O}_1^{\text{car}}$ est un faisceau. On a même un résultat un peu meilleur :

Proposition 4.1.5. *Le préfaisceau σ_1^{car} , défini de la même façon sur le site (\mathcal{LFS}/E_1) formé de tous les log-schémas fins sur E_1 (pas nécessairement de type fini), est un faisceau sur ce site.*

Démonstration. C'est essentiellement la même que celle de l'appendice B de [Bre98]. Toutefois, si X est un objet de (\mathcal{LFS}/E_1) , on ne peut pas nécessairement le plonger (même étale-localement) dans un log-schéma log-lisse. Néanmoins, il est possible de le plonger étale-localement dans un log-schéma Y associé à un morphisme de monoïde de la forme :

$$\bigoplus_{\lambda \in I} \mathbb{N}u_\lambda \rightarrow k[T_\lambda]_{\lambda \in J} \quad ; \quad u_\lambda \mapsto T_\lambda$$

où $I \subset J$ sont des ensembles d'indices et I est fini. Si U est étale sur X , si T est défini sur E_1 et si $U \hookrightarrow T$ est une immersion fermée défini par un idéal dont la puissance p -ième est nulle, il est quasiment immédiat de vérifier qu'étale localement la composée $U \rightarrow X \rightarrow Y$ se prolonge à T . On peut alors appliquer les arguments de paragraphe V.1.2 de [Ber74] et montrer comme dans l'appendice B.1 de [Bre98] que la cohomologie p -infinésimale (définie dans cette appendice) se calcule par un complexe de Čech-Alexander. Les arguments des paragraphes B.2 et B.3 de *loc. cit.* se généralisent alors et démontrent la proposition. \square

Soit $U \in (T_n)_{\text{syn}}$. Sur le site $(U_1/E_n)_{\text{CRIS}}$ (avec $U_1 = U \times_{T_n} T_1$), on définit un préfaisceau $\mathcal{O}_{U_1/E_n}^{\text{car}}$ par la formule :

$$\mathcal{O}_{U_1/E_n}^{\text{car}}(\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{T}) = \sigma_n^{\text{car}}(\mathcal{T}).$$

Le morphisme $\mathcal{O}_n \rightarrow \sigma_n^{\text{car}}$ induit par $U_n'' \rightarrow U_n' \rightarrow U_n$ fournit une flèche $\mathcal{O}_{U_1/E_n} \rightarrow \mathcal{O}_{U_1/E_n}^{\text{car}}$ qui permet de voir $\mathcal{O}_{U_1/E_n}^{\text{car}}$ comme un préfaisceau de \mathcal{O}_{U_1/E_n} -algèbres. En tant que tel, c'est un cristal (et donc *a fortiori* un faisceau) puisque les morphismes du petit site sont tous stricts sur les log-structures par définition. Ceci permet de poser :

$$\sigma_n^{\text{st,car}}(U) = H^0((U_1/E_n)_{\text{CRIS}}, \mathcal{O}_{U_1/E_n}^{\text{car}})$$

ce qui définit un préfaisceau sur $(T_n)_{\text{syn}}$. Comme d'habitude, on appelle $\mathcal{O}_n^{\text{st,car}}$ le faisceau associé. Pour tout $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{T}$, on a par functorialité une flèche $\sigma_n^{\text{car}}(\mathcal{T}) \rightarrow \sigma_n^{\text{car}}(\mathcal{U})$, d'où on récupère un morphisme $\mathcal{O}_n^{\text{st,car}} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{car}}$.

Pour tout entier t , on désigne par $\mathcal{J}_{U_1/E_n}^{[t],\text{car}}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{U_1/E_n}^{\text{car}}$ engendré par l'image de $\mathcal{J}_{U_1/E_n}^{[t]}$. Il permet de définir de manière analogue à ce qui précède des préfaisceaux $j_n^{[t],\text{car}}$ qui forment une filtration décroissante de $\sigma_n^{\text{st,car}}$. Appelons $\mathcal{J}_n^{[t],\text{car}}$ le faisceau associé à $j_n^{[t],\text{car}}$.

On dispose en plus d'une factorisation du Frobenius sur $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$ construite comme suit. Si F_{U_1/E_n} désigne le morphisme de topoi de $(\widetilde{U_1/E_n})_{\text{cris}}$ associé aux morphismes de Frobenius, on construit facilement une flèche $\mathcal{O}_{U_1/E_n}^{\text{car}} \rightarrow F_{U_1/E_n} \star \mathcal{O}_{U_1/E_n}$ qui induit à son tour un morphisme $\phi_{/E_n} : \sigma_n^{\text{st,car}} \rightarrow \mathcal{O}_n^{\text{st}}$. Par ailleurs, la flèche $\mathcal{O}_{U_1/E_n} \rightarrow \mathcal{O}_{U_1/E_n}^{\text{car}}$ induit un morphisme $\mathcal{O}_n^{\text{st}} \rightarrow \sigma_n^{\text{st,car}}$ et on vérifie que la composée de celui-ci avec $\phi_{/E_n}$ est le Frobenius sur $\mathcal{O}_n^{\text{st}}$.

On a par ailleurs des descriptions explicites analogues à celles des paragraphes 3.3 et 3.5. Pour les obtenir, on considère à nouveau les log-schémas U^i , Y^i et Z^i introduits en 3.3. On note U_1^i la réduction de U^i modulo p et D^i l'enveloppe à puissances divisées de l'immersion fermée $U_1^i \hookrightarrow Y^i$. Une exactification de cette dernière immersion est donnée par la composition

$U_1^i \hookrightarrow Z^i \rightarrow Y^i$. Considérons également $Z''^i \rightarrow Z^i$ (resp. $D''^i \rightarrow D^i$) un relèvement de la partie log-étale du Frobenius relatif de $Z^i \times_{V_n} V_1/V_1$ (resp. de $D^i \times_{V_n} V_1/E_1$) et notons $C''^\infty = \varinjlim_i \Gamma(Z''^i, \mathcal{O}_{Z''^i})$. On vérifie que $D''^i = D^i \times_{E_n \times_{V_n} Z^i} (E_n \times_{V_n} Z''^i)$, d'où il résulte :

$$\mathcal{O}_n^{\text{st,car}}(U^\infty) = \varinjlim_i \Gamma(D''^i, \mathcal{O}_{D''^i}) = R^\infty \otimes_{S_n \otimes_{W_n[u]} C^\infty} (S_n \otimes_{W_n[u]} C''^\infty)$$

où la structure de $(S_n \otimes_{W_n[u]} C^\infty)$ -module sur $S_n \otimes_{W_n[u]} C''^\infty$ est donné par le morphisme $S_n \otimes_{W_n[u]} C^\infty \rightarrow S_n \otimes_{W_n[u]} C''^\infty$ qui est le Frobenius sur la première composante et l'application $C^\infty \rightarrow C''^\infty$ induit par les morphismes $Z''^i \rightarrow Z^i \rightarrow Y^i$ sur la deuxième composante. Le relevé du Frobenius sur Z^i défini en 3.4.1 se factorise *via* $Z^i \rightarrow Z''^i \rightarrow Y^i$ où le second morphisme est celui que l'on a déjà considéré. Le premier morphisme induit, quant à lui, par passage à la limite inductive une application $f_{C^\infty} : C''^\infty \rightarrow C^\infty$ qui est un isomorphisme modulo p d'après l'argument qui précède la formule (10). Du fait que C^∞ est plat sur W_n , on déduit que f_{C^∞} est lui-même un isomorphisme. Finalement, on a la description :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_n^{\text{st,car}}(U^\infty) &= R^\infty \otimes_{S_n \otimes_{W_n[u]} C^\infty, (\phi \otimes \phi)} (S_n \otimes_{W_n[u]} C^\infty) \\ &= S_n \langle g_1, \dots, g_t, Y \rangle \otimes_{W_n[u, g_1, \dots, g_t, Y]} C^\infty \end{aligned} \quad (11)$$

où dans la première identification $\phi : C^\infty \rightarrow C^\infty$ désigne le morphisme correspondant aux Frobenius sur les Z^i , et où dans la deuxième les g_i (resp. Y) s'envoient sur $\phi(f_i)$ (resp. $\phi(X) = (1+X)^p - 1$) dans C^∞ . Notez également que la seconde ligne découle de la première à partir de la formule (7). De plus, on vérifie que le morphisme $\phi_{/E_n}$ est, *via* les écritures précédentes, donné par l'application multiplicative :

$$S_n \langle g_1, \dots, g_t, Y \rangle \otimes_{W_n[u, g_1, \dots, g_t, Y]} C^\infty \rightarrow S_n \langle f_1, \dots, f_t, X \rangle \otimes_{W_n[u, f_1, \dots, f_t, X]} C^\infty \quad (12)$$

qui envoie $\gamma_m(g_i) \otimes 1$ sur $1 \otimes \gamma_m(\phi(f_i))$ et qui est l'identité sur C^∞ .

Lemme 4.1.6. *Le faisceau $\mathcal{O}_n^{\text{st,car}}$ est plat sur S_n . De plus, pour tout U , $\mathcal{O}_n^{\text{st,car}}(U^\infty)$ s'identifie à l'enveloppe à puissances divisées de C^∞ par rapport à l'idéal engendré par $E(u)$, $\phi(X)$ et les $\phi(f_i)$ (et compatibles avec les puissances divisées canoniques sur pW_n).*

Démonstration. En vertu de la formule (11), il suffit pour montrer le lemme de justifier que le morphisme $f : \tilde{Z}^i \rightarrow \text{Spec}(W_n[u, g_1, \dots, g_t, Y])$, $u \mapsto u$, $g_i \mapsto \phi(f_i)$, $Y \mapsto \phi(X)$ est plat sur un voisinage de $\text{Spec}(\frac{C^\infty}{(u, \phi(f_1), \dots, \phi(f_t), \phi(X))})$. Comme la source et le but de f sont plats sur W_n , il suffit de montrer le résultat pour $f_1 = f \bmod p$. Or f_1 s'écrit comme la composée de $\tilde{Z}^i/p \rightarrow \text{Spec}(k[u, f_1, \dots, f_t, X])$ et de $\text{Spec}(k[u, f_1, \dots, f_t, X]) \rightarrow \text{Spec}(k[u, g_1, \dots, g_t, Y])$, $u \mapsto u$, $g_i \mapsto f_i^p$, $Y \mapsto X^p$. On a déjà vu que le premier morphisme est plat sur un voisinage de \tilde{U}^i/p (cela résultait de la régularité de la suite $(X, E(u), f_1, \dots, f_t)$ dans C^i). Le second, quant à lui, est clairement plat. D'où la conclusion. \square

Lorsque $n = 1$, la situation est meilleure. D'une part le préfaisceau $\mathcal{O}_1^{\text{st,car}}$ s'écrit $w_* \mathcal{O}_1^{\text{car}}$ et est donc déjà un faisceau, *i.e.* $\mathcal{O}_1^{\text{st,car}} = \mathcal{O}_1^{\text{car}}$. D'autre part, avec les notations précédentes, on vérifie que $j_1^{[s], \text{car}}(U^\infty)$ est l'idéal de $\mathcal{O}_1^{\text{st,car}}(U^\infty)$ engendré par les $\gamma_{m_1}(f_1^p) \cdots \gamma_{m_t}(f_t^p) \gamma_{m_{t+1}}(X^p)$ pour $|m| \geq s$. (Attention, les puissances divisées de $E(u)$ n'apparaissent pas ici!) La régularité de la suite $(f_1^p, \dots, f_t^p, X^p)$ permet alors d'obtenir la formule suivante pour les gradués de la filtration :

$$\frac{j_1^{[s], \text{car}}(U^\infty)}{j_1^{[s+1], \text{car}}(U^\infty)} = \bigoplus_{|m|=s} \mathcal{A}_1 \gamma_{m_1}(f_1^p) \cdots \gamma_{m_t}(f_t^p) \gamma_{m_{t+1}}(X^p) \quad (13)$$

valables pour tout entier $s \geq 0$. Si l'on retourne voir la description des préfaisceaux $f'_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ introduits dans le théorème 3.5.1, on constate que la formule que l'on vient d'obtenir est très proche de celle qui décrit les quotients $f'_s \mathcal{O}_1^{\text{st}} / f'_{s+1} \mathcal{O}_1^{\text{st}}$. Nous désirons à présent montrer que ces deux préfaisceaux conduisent effectivement à des faisceaux isomorphes et pour cela nous commençons par construire un morphisme qui relie les faisceaux en question.

La méthode pour cela est la même que celle du [FM87] reprise dans le paragraphe 2.2.2 de [Bre98], mais en manipulant les objets précédemment introduits. Pour tout entier s , notons $\tilde{f}^s \mathcal{o}_{s+1}^{\text{st,car}}$ le préfaisceau noyau de la composée $\mathcal{o}_{s+1}^{\text{st,car}} \rightarrow \mathcal{O}_{s+1}^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{O}_s^{\text{st}}$ où la première flèche est $\phi_{/E_{s+1}}$ et la seconde la projection canonique. Appelons $\tilde{\mathcal{F}}^s \mathcal{O}_{s+1}^{\text{st,car}}$ le faisceau associé : par les propriétés d'exactitude, c'est aussi le noyau de la composée $\mathcal{O}_{s+1}^{\text{st,car}} \rightarrow \mathcal{O}_{s+1}^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{O}_s^{\text{st}}$. Soit $f^s \mathcal{O}_1^{\text{st,car}}$ (resp. $\mathcal{F}^s \mathcal{O}_1^{\text{st,car}}$) le préfaisceau image (resp. le faisceau image) dans $\mathcal{O}_1^{\text{st,car}}$ de $\tilde{f}^s \mathcal{o}_{s+1}^{\text{st,car}}$ (resp. $\tilde{\mathcal{F}}^s \mathcal{O}_{s+1}^{\text{st,car}}$) par la projection $\mathcal{o}_{s+1}^{\text{st,car}} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st,car}}$ (resp. $\mathcal{O}_{s+1}^{\text{st,car}} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st,car}}$). À nouveau, $\mathcal{F}^s \mathcal{O}_1^{\text{st,car}}$ est le faisceau associé à $f^s \mathcal{O}_1^{\text{st,car}}$. D'autre part, le Frobenius relatif $\phi_{/E_{s+1}}$ induit une application :

$$\tilde{f}^s \mathcal{o}_{s+1}^{\text{st,car}} \longrightarrow \ker(\mathcal{O}_{s+1}^{\text{st}} \rightarrow \mathcal{O}_s^{\text{st}}) = \mathcal{O}_1^{\text{st}}$$

la dernière identification étant donnée par la multiplication par p^s . On appelle $f_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ le préfaisceau image du morphisme précédent. On peut bien entendu faire la même construction avec des faisceaux à la place des préfaisceaux : on obtient comme ceci $\mathcal{F}_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ sous-faisceau de $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$ qui n'est autre que le faisceau associé à $f_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}$. Par des arguments de platitude, on montre facilement le lemme suivant :

Lemme 4.1.7. *Les $f^s \mathcal{O}_1^{\text{st,car}}(U^\infty)$ forment une filtration décroissante de $\mathcal{O}_1^{\text{st,car}}(U^\infty)$ tandis que les $f_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)$ forment une filtration croissante de $\mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)$. De plus, $\phi_{/E_{s+1}}$ induit un isomorphisme :*

$$f_s : \frac{f^s \mathcal{O}_1^{\text{st,car}}(U^\infty)}{f^{s+1} \mathcal{O}_1^{\text{st,car}}(U^\infty)} \simeq \frac{f_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)}{f_{s-1} \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)}$$

pour tout entier $s \geq 0$ (où par convention $f_{-1} \mathcal{O}_1^{\text{st}} = \mathcal{O}_1^{\text{st}}$).

Remarque. On en déduit un résultat analogue sur les faisceaux correspondants.

La correction de la proposition 2.2.2.2 de [Bre98] est l'énoncé suivant :

Lemme 4.1.8. *Pour tout entier s , $\mathcal{F}^s \mathcal{O}_1^{\text{st,car}} = \mathcal{J}_1^{[s],\text{car}}$ et pour tout U :*

$$f_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty) = \bigoplus_{|\underline{m}| \leq s} \mathcal{A}_1 \gamma_{pm_1}(f_1) \cdots \gamma_{pm_t}(f_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X) \subset \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty).$$

En particulier, si s vérifie $es < p - 1$, on a $f_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty) = f'_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)$.

Démonstration. C'est désormais essentiellement la même que celle de la proposition *loc. cit.*. Nous redonnons simplement ici les grandes lignes. On fixe un U/T_{s+1} de la forme habituelle et on considère C^∞ tel que :

$$\mathcal{o}_{s+1}^{\text{st,car}}(U^\infty) = S_{s+1} \langle g_1, \dots, g_t, Y \rangle \otimes_{W_{s+1}[u, g_1, \dots, g_t, Y]} C^\infty$$

où g_i (resp. X) est envoyé sur $\phi(f_i)$ (resp. $\phi(X)$) dans C^∞ . Notons R cet anneau.

On montre dans un premier temps les inclusions $\mathcal{J}_1^{[s],\text{car}}(U^\infty) \subset f^s \mathcal{O}_1^{\text{st,car}}(U^\infty)$ et

$$\text{Fil}_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty) = \bigoplus_{|\underline{m}| \leq s} \mathcal{A}_1 \gamma_{pm_1}(f_1) \cdots \gamma_{pm_t}(f_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X) \subset f_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)$$

où \mathcal{A}_1 est calculé à partir de $U_1 = U \times_{T_{s+1}} T_1$. Pour cela, on évalue les images par $\phi_{/E_{s+1}}$ des éléments $f = \gamma_{m_1}(f_1^p) \cdots \gamma_{m_t}(f_t^p) \gamma_{m_{t+1}}(X^p) \in \mathcal{O}_{s+1}^{\text{st}, \text{car}}(U^\infty)$ pour $|m| \geq s$. Utilisant la description donnée *via* la formule (12), on obtient :

$$\begin{aligned} \phi_{/E_{s+1}}(f) &= \gamma_{m_1}(f_1^p) \cdots \gamma_{m_t}(f_t^p) \gamma_{m_{t+1}}(X^p) \\ &= \alpha p^{|m|} \gamma_{pm_1}(f_1) \cdots \gamma_{pm_t}(f_t) \gamma_{pm_{t+1}}(X) \end{aligned} \quad (14)$$

où α est une unité de \mathbb{Z}_p . Les deux inclusions précédemment annoncées en résultent lorsque l'on se rappelle que les réductions modulo p des f précédents engendrent $j_1^{[s], \text{car}}(U^\infty)$.

On procède finalement par récurrence sur s , l'hypothèse de récurrence étant $j_1^{[s], \text{car}}(U^\infty) = f^s \mathcal{O}_1^{\text{st}, \text{car}}(U^\infty)$ et $\text{Fil}_{s-1} \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty) = f_{s-1} \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)$. L'initialisation ne pose pas de problème. Pour l'hérédité, on écrit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \frac{j_1^{[s], \text{car}}(U^\infty)}{j_1^{[s+1], \text{car}}(U^\infty)} & \longrightarrow & \frac{\text{Fil}_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)}{\text{Fil}_{s-1} \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{f^s \mathcal{O}_1^{\text{st}, \text{car}}(U^\infty)}{f^{s+1} \mathcal{O}_1^{\text{st}, \text{car}}(U^\infty)} & \xrightarrow{f_s} & \frac{f_s \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)}{f_{s-1} \mathcal{O}_1^{\text{st}}(U^\infty)} \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par les inclusions prouvées précédemment. La flèche du haut est un isomorphisme d'après les formules (13) et (14). Celle du bas en est un aussi (lemme 4.1.7). Par hypothèse de récurrence, la flèche de gauche est surjective et celle de droite injective. On en déduit qu'elles sont toutes des isomorphismes, d'où il suit l'hypothèse de récurrence au rang suivant. \square

Lemme 4.1.9. *Pour tout entier s , l'association $(\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{T}) \mapsto \mathcal{J}_{U_1/E_1}^{[s], \text{car}}(\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{T})$ définit encore un faisceau sur $(U_1/E_1)_{\text{SYN-CRIS}}$.*

Démonstration. Soient $(\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{T}) \in (U_1/E_1)_{\text{SYN-CRIS}}$ et $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ l'idéal définissant l'immersion fermée $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}$. Notons $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}^{[s]}$ la s -ième puissance divisée de $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{T}^{\leq s}$ le sous-schéma fermé de \mathcal{T} défini par $\mathcal{J}_{\mathcal{T}}^{[s]}$. Posons également :

$$\mathcal{O}_1^{\leq s, \text{car}}(\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{T}) = \Gamma(\mathcal{T}^{\leq s}, \mathcal{O}_{\mathcal{T}^{\leq s}}^{\text{car}}).$$

Du fait les morphismes log-syntomiques sont plats sur les schémas sous-jacents, on déduit facilement que si $(\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{T}) \rightarrow (\mathcal{U}' \hookrightarrow \mathcal{T}')$ est un recouvrement pour la topologie log-syntomique, on a $\mathcal{T}'^{\leq s} = \mathcal{T}^{\leq s} \times_{\mathcal{T}} \mathcal{T}'$ et de là que $\mathcal{O}_1^{\leq s, \text{car}}$ est un faisceau sur $(U_1/E_1)_{\text{SYN-CRIS}}$. Alors $\mathcal{J}_{U_1/E_1}^{[s], \text{car}}$ apparaît comme le noyau de $\mathcal{O}_1^{\text{car}} \rightarrow \mathcal{O}_1^{\leq s, \text{car}}$ qui est un morphisme entre faisceaux log-syntomiques. Il est donc lui-même un faisceau log-syntomique. \square

On peut enfin déduire le résultat qui nous intéresse :

Proposition 4.1.10. *Pour tous entiers i et s avec $0 \leq i \leq s$, l'inclusion canonique $\mathcal{F}_s \mathcal{O}_1^{\text{st}} \hookrightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ induit un isomorphisme sur les $H^i((X_{s+1})_{\text{syn}}, -)$.*

Démonstration. D'après ce qui précède, pour tout entier s , on a une suite exacte sur $(T_{s+2})_{\text{syn}}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_s \mathcal{O}_1^{\text{st}} \longrightarrow \mathcal{F}_{s+1} \mathcal{O}_1^{\text{st}} \longrightarrow \frac{\mathcal{J}_1^{[s+1], \text{car}}}{\mathcal{J}_1^{[s+2], \text{car}}} \longrightarrow 0. \quad (15)$$

Comme, d'après les descriptions du lemme 4.1.8, $\bigcup_{s \gg r} \mathcal{F}^s \mathcal{O}_1^{\text{st}} = \mathcal{O}_1^{\text{st}}$, il suffit pour conclure de montrer que $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_1^{[s+1], \text{car}} / \mathcal{J}_1^{[s+2], \text{car}}) = 0$ pour $i \leq s$.

Par le lemme 4.1.9 et les propriétés de v_* et w_* , on a $Rv_* \mathcal{J}_{X_1/E_1}^{[s], \text{car}} = \mathcal{J}_{X_1/E_1}^{[s], \text{car}}$ et $Rw_* \mathcal{J}_{X_1/E_1}^{[s], \text{car}} = \mathcal{J}_{X_1/E_1}^{[s], \text{car}}$. Ainsi $R\alpha_* \mathcal{J}_1^{[s], \text{car}} = Ru_* \mathcal{J}_{X_1/E_1}^{[s], \text{car}}$. Pour calculer ce dernier, on considère étale-localement Y log-lisse sur E_1 sur lequel les puissances divisées s'étendent et vérifiant $Y \times_{E_1} T_1 = X_1$. Le morphisme $X_1 \hookrightarrow Y$ est alors une immersion fermée exacte dont l'idéal \mathcal{J}_Y est engendré par $\text{Fil}^1 S_1$ et est muni de puissances divisées. Si $Y \rightarrow Y'' \rightarrow Y'$ est la factorisation habituelle du Frobenius, on a :

$$R\alpha_* \mathcal{J}_1^{[s], \text{car}} = Ru_* \mathcal{J}_{X_1/E_1}^{[s], \text{car}} \simeq \mathcal{J}_Y^{[s]} \mathcal{O}_{Y''} \rightarrow (\mathcal{J}_Y^{[s-1]} \mathcal{O}_{Y''}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/E_1}^1 \rightarrow (\mathcal{J}_Y^{[s-2]} \mathcal{O}_{Y''}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \omega_{Y/E_1}^2 \rightarrow \dots$$

où les éléments de $\mathcal{J}_Y^{[\bullet]}$ agissent sur ceux de $\mathcal{O}_{Y''}$ via le morphisme $Y'' \rightarrow Y$. Comme \mathcal{J}_Y est engendré par $\text{Fil}^1 S_1$ et que $\phi(\text{Fil}^1 S_1) = 0$, les objets du complexe précédent en degré strictement inférieur à s disparaissent. Il s'ensuit $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_1^{[s], \text{car}}) = 0$ pour tout $i < s$, ce qui implique facilement le résultat voulu. \square

Pour les autres bases, c'est-à-dire \tilde{E} , $\tilde{E}_{(2)}$ (si $e \geq 2$) et \bar{E} , on peut procéder comme suit. Si Υ désigne l'un de ces bases (et S_Υ son anneau), on note $\mathcal{F}'_s \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$ associé au préfaisceau $f'_s \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$ (défini dans l'énoncé du théorème 3.5.1). Les descriptions locales données impliquent $\mathcal{F}'_s \mathcal{O}_1^{\text{st}} \otimes_{S_1} S_\Upsilon = \mathcal{F}'_s \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}}$. Par ailleurs, en recopiant les définitions de cette partie, et en remplaçant E_n par Υ , il est possible de définir des faisceaux $\mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}, \text{car}}$ et $\mathcal{J}_\Upsilon^{[s], \text{car}}$ qui sont décrits par :

$$\mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}, \text{car}}(U^\infty) = S_\Upsilon \langle g_1, \dots, g_t, Y \rangle \otimes_{k[u, g_1, \dots, g_t, Y]} C^\infty$$

et le fait que $\mathcal{J}_\Upsilon^{[s], \text{car}}(U^\infty)$ soit engendré par la s -ième puissance divisée de l'idéal de $S_\Upsilon \langle g_1, \dots, g_t, Y \rangle$ engendré par g_1, \dots, g_t, Y . On en déduit $\mathcal{J}_1^{[s], \text{car}} \otimes_{S_1} S_\Upsilon = \mathcal{J}_\Upsilon^{[s], \text{car}}$ pour tout entier s . En tensorisant (15) par S_Υ , on obtient la suite :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_s \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}} \longrightarrow \mathcal{F}_{s+1} \mathcal{O}_\Upsilon^{\text{st}} \longrightarrow \frac{\mathcal{J}_\Upsilon^{[s+1], \text{car}}}{\mathcal{J}_\Upsilon^{[s+2], \text{car}}} \longrightarrow 0.$$

qui est encore exacte. Les arguments de la preuve de la proposition 4.1.10 s'appliquent alors et permettent de conclure.

4.1.2 Fin de la preuve

On garde les notations et les hypothèses introduites au début du paragraphe 4.1.

Au vu du théorème 4.1.1, il reste à prouver, pour s'assurer que le quadruplet :

$$(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}), \phi_r, N)$$

est un objet de $\tilde{\mathcal{M}}^r$, les trois choses suivantes :

1. le \tilde{S} -module $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est de type fini,
2. la flèche canonique $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]} / \tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]})$ est surjective,
3. la flèche canonique $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est injective,

les autres propriétés de compatibilité étant claires.

Si \mathcal{F} est un faisceau sur $(X_1)_{\text{syn}}$, nous notons simplement $H^i(\mathcal{F})$ pour $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{F})$ et si ce dernier est un espace vectoriel de dimension finie sur k , nous notons $h^i(\mathcal{F})$ sa dimension.

Propriétés de finitude. Nous commençons par donner un résultat agréable sur les faisceaux $u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$:

Proposition 4.1.11. *Pour tous entiers k et $i < \frac{p}{e}$, les k -espaces vectoriels¹² $H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ sont de dimension finie et égaux à $u^k H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$.*

De façon équivalente, la multiplication par $u^k : \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \rightarrow u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ induit une surjection sur les H^i , alors que l'inclusion canonique $u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ induit une injection sur les H^i .

Démonstration. En premier lieu, on remarque que si $k \geq p$, tout est nul et donc la proposition est trivialement vérifiée. Montrons que $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est de dimension finie sur k . Le log-schéma $\bar{X} = X_1 \times_{T_1} \bar{T}$ est log-lisse sur $\bar{T} = \bar{E}$ par changement de base et donc par le théorème 4.1.3, $R\alpha_* \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} = \mathcal{O}_{\bar{X}} \rightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^1 \rightarrow \dots$. Comme \bar{X}/\bar{E} est propre, les $H^i(\bar{X}_{\text{ét}}, \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^j)$ sont de dimension finie, et il en est donc de même de $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Le théorème 4.1.1 utilisé avec $\Upsilon = \tilde{E}$ et $\Upsilon = \bar{E}$ permet alors de conclure.

Prouvons désormais la proposition par récurrence sur i . La platitude de $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ sur \tilde{S} conduit à la suite exacte :

$$0 \longrightarrow u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \xrightarrow{u^{p-k}} u^{p-k} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \longrightarrow 0.$$

L'hypothèse de récurrence entraîne en écrivant la suite exacte longue de cohomologie associée que la flèche $H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est injective. Ainsi $H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est de dimension finie car inclus dans $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. De même, on a une suite exacte courte de faisceaux, pour tout entier $k \leq p-1$:

$$0 \longrightarrow u^{p-1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \longrightarrow u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \xrightarrow{u} u^{k+1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \longrightarrow 0.$$

Par l'hypothèse de récurrence, la suite exacte longue associée prend la forme :

$$0 \longrightarrow H^i(u^{p-1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(u^{k+1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$$

et fournit une inégalité sur les dimensions à savoir $h^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \leq h^i(u^{k+1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) + h^i(u^{p-1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Or $u^{p-1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \simeq \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$, d'où en additionnant les inégalités précédentes pour k variant de 0 à p , on obtient $h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \leq p h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Or le théorème 4.1.1 appliqué à $\Upsilon = \tilde{E}$ et $\Upsilon = \bar{E}$ prouve qu'il y a en fait égalité entre les deux nombres précédents. Cela implique que toutes les inégalités sommées sont des égalités et par suite que l'on a des suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow H^i(u^{p-1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(u^{k+1} \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow 0.$$

Si $k \leq p$, le morphisme de multiplication par u^k se factorise par $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. D'après ce qui précède, la première flèche est surjective et la seconde est injective. On en déduit le résultat annoncé. \square

Remarque. L'injection est encore vraie pour $i < \frac{p}{e} + 1$.

Intéressons-nous à présent aux faisceaux $u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$.

Proposition 4.1.12. *Pour tout entier k , tout $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ et tout entier $i < \frac{p}{e}$, l'espace vectoriel $H^i(u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ est de dimension finie sur k .*

¹²La lettre k désigne ici simultanément le corps résiduel et un entier valable. Nous espérons toutefois que cela n'entraînera pas de confusion.

Démonstration. Pour $k \geq p$, l'assertion est évidente puisque $u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} = 0$.

Par ailleurs, comme $\bar{X} = X_1 \times_{T_1} \bar{T}$ est log-lisse sur $\bar{T} = \bar{E}$, on a, par le théorème 4.1.3, $R\alpha_* \tilde{\mathcal{J}}^{[s]} = 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^s \rightarrow \omega_{\bar{X}/\bar{E}}^{s+1} \rightarrow \dots$, et donc puisque \bar{X} est propre sur \bar{E} , les groupes $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]})$ sont de dimension finie pour tous entiers i et s . Si $k \leq p-1$, le lemme 3.3.7 assure que $H^i(u^k \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$ est de dimension finie si et seulement si $H^i(u^{k+1} \tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ l'est. On se ramène ainsi à $k = p$ ou $q = 0$. Le premier cas est traité précédemment et le second par la proposition 4.1.11. \square

Surjectivité de $\mathbf{H}^i((\mathbf{X}_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow \mathbf{H}^i((\mathbf{X}_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]})$. On commence par prouver un lemme :

Lemme 4.1.13. *Soient $i \in \mathbb{N}$ et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$. Supposons $0 \leq i \leq q < \frac{p}{e}$. On a des suites exactes courtes :*

$$0 \longrightarrow H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow H^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que la suite :

$$0 \longrightarrow \bar{\mathcal{O}}^{\text{st}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \xrightarrow{u} u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow 0$$

est exacte. La première flèche résulte de l'inclusion $\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}} = u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \subset \tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ et donc est injective. La surjectivité est également claire. Par ailleurs, le noyau de la multiplication par u sur $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ est $u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$ et donc le noyau de $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \rightarrow u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ s'identifie à $(u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} \cap \tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = u^{p-1}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$.

En écrivant la suite exacte longue associée à la suite exacte courte précédente, on obtient déjà l'exactitude au milieu dans la suite de l'énoncé du lemme. Pour l'injectivité, on remarque que d'après la proposition 4.1.11, on a $H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) = u^{p-1}H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ et donc la flèche composée $H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est injective. Il en est donc de même de la flèche $H^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$. La surjectivité découle de l'injectivité car les flèches de bord sont nulles, et en utilisant la remarque qui suit la proposition 4.1.11. \square

La surjectivité de $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]})$ résulte directement de la proposition plus générale suivante :

Proposition 4.1.14. *Soient i un entier et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq i \leq q < \frac{p}{e}$. On a des suites exactes courtes :*

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) \longrightarrow 0.$$

En outre, si s désigne la partie entière de q , on a également un début de suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}).$$

Démonstration. La preuve résulte d'un calcul de dimension. Précisément, on va prouver que pour tout $0 \leq i \leq q < \frac{p}{e}$, on a $h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}) + h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$. On déduira alors la proposition par une récurrence immédiate sur i .

D'après le lemme précédent, on a déjà $h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = h^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) + h^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$. Par le corollaire 3.3.6, la multiplication par $u^{e(q-s)}$ induit un isomorphisme entre les faisceaux $\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$ et $\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]}$. Le théorème 4.1.1 implique alors $h^i(\bar{\mathcal{O}}^{\text{st}}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$. D'autre part, on a la suite exacte (lemme 3.3.7) :

$$0 \longrightarrow u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \longrightarrow 0.$$

Or, puisque $R\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} = 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \omega_{\tilde{X}/\tilde{E}}^{s+1} \rightarrow \omega_{\tilde{X}/\tilde{E}}^{s+2} \rightarrow \dots$ (par le théorème 4.1.3), on a $H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}) = 0$ pour tout $j \leq s$. On en déduit $H^j(u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$ pour tout $j \leq s$. En particulier $h^i(u\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q+1/e]})$ ce qui conclut la démonstration. \square

Injectivité de $\mathbf{H}^i((\mathbf{X}_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \rightarrow \mathbf{H}^i((\mathbf{X}_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Commençons par énoncer le lemme suivant :

Lemme 4.1.15. *Pour tout $i < \frac{p}{e}$, l'application $H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]})$ est injective.*

Démonstration. Par un raisonnement analogue à celui utilisé pour la preuve du lemme 3.3.7, on montre que l'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]} \xrightarrow{u^{ei}} u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]} \longrightarrow 0.$$

Il suffit donc de prouver que $H^{i-1}(u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]}) = 0$. En utilisant de façon répétée le dernier argument de la preuve de la proposition 4.1.14, on montre que $H^j(u^{ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]}) = H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[i+p/e]})$ pour tout $j \leq \frac{p}{e}$ et donc *a fortiori* pour tout $j \leq i$. Posons $q = i + \frac{p}{e}$ et notons s la partie entière de q . Étale-localement, on peut relever X_1 et un log-schéma Y_1 log-lisse (auquel on étend les puissances divisées) sur \tilde{E} . Par le théorème 4.1.3, le complexe $R\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}$ s'écrit explicitement :

$$R\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}^{[q]} = (u^\delta \mathcal{J}_{Y_1}^{[s]} + \mathcal{J}_{Y_1}^{[s+1]}) \rightarrow (u^\delta \mathcal{J}_{Y_1}^{[s-1]} + \mathcal{J}_{Y_1}^{[s]}) \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \omega_{Y_1/\tilde{E}}^1 \rightarrow \dots$$

où δ est le reste de la division euclidienne de p par e . Or, si $j < i$, on a $s - j \geq \frac{p}{e}$ et donc $\gamma_{s-j}(u^e) = 0$. Il s'ensuit $\mathcal{J}_{Y_1}^{[s-j]} = 0$ puis le résultat. \square

Proposition 4.1.16. *Pour tout i et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ tels que $q \leq i \leq r$, l'application $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]})$ est injective.*

Démonstration. On raisonne par récurrence descendante sur q . Le résultat est trivial pour $q = i$. Supposons-le vrai pour un certain q et démontrons-le pour $q - \frac{1}{e}$. On vérifie facilement que l'on a des suites exactes courtes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}^{[i]} & \xrightarrow{u^{p-ei}} & u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]} & \xrightarrow{u^{p-ei}} & u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]} \longrightarrow 0 \end{array}$$

qui donnent lieu à de nouvelles suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc} H^i(u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) & \longrightarrow & H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \\ & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^i(u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) \longrightarrow H^i(u^{p-ei}\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) \end{array}$$

La deuxième suite est exacte à gauche car la flèche composée $H^i(u^{ei}\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ est injective (proposition 4.1.11). On veut montrer que la flèche verticale du milieu est injective, et une chasse au diagramme laissée au lecteur assure que pour cela, il suffit de prouver que la flèche verticale de droite l'est.

Or, on peut former le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^i(u^{p-ei} \tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[p/e]}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(u^{p-ei} \tilde{\mathcal{J}}^{[q-1/e]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \end{array}$$

La flèche du haut est injective d'après le lemme 4.1.15 et celles de droite le sont également respectivement d'après la proposition 4.1.14 et l'hypothèse de récurrence. On en déduit que celle de gauche l'est aussi comme on le souhaitait. \square

On a finalement le théorème :

Théorème 4.1.17. *Pour tout $i \leq r$, le quadruplet $(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}), \phi_r, N)$ définit un objet de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}^r$.*

Démonstration. Il restait à prouver la finitude de $H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$, la surjectivité de $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]} \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]})$ et l'injectivité de $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]} \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Le premier point est traité dans la proposition 4.1.11. Le second est une conséquence immédiate de la proposition 4.1.14. Pour le troisième, on remarque que le morphisme $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]} \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ se factorise par $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]} \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[i]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. La première des deux flèches précédentes est injective par la proposition 4.1.14 et la seconde est aussi injective par la proposition 4.1.16. Ceci clôt la démonstration. \square

4.1.3 Reformulation sur la base E_1

On montre dans ce paragraphe que le quadruplet :

$$(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$$

est un objet de la catégorie \mathcal{M}^r pour tout $i \leq r$. Lorsque $e = 1$, il est expliqué dans le paragraphe 2.2.4 de [Bre98] comme déduire ce résultat du résultat analogue sur \tilde{E} que l'on vient de prouver. *On suppose donc à partir de maintenant que $e \geq 2$.*

Un objet de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ On prouve tout d'abord que le quadruplet :

$$(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}), \phi_r, N)$$

est un objet de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$.

Comme précédemment, pour simplifier, si \mathcal{F} est un faisceau sur $(X_1)_{\text{syn}}$, on note $H^i(\mathcal{F})$ pour $H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{F})$ et si cet espace est de dimension finie sur k , on note $h^i(\mathcal{F})$ sa dimension. On a alors :

Théorème 4.1.18. *Pour tout $i \leq r$, le groupe de cohomologie $H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}})$ est libre de rang fini sur $\tilde{S}_{(2)}$.*

Démonstration. D'après le théorème 4.1.1, il suffit de montrer que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+2/e]})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^2$. Or on a un isomorphisme $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+2/e]} \simeq \tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}$ (corollaire 3.3.5). Il suffit donc de prouver que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^2$.

Notons $\mathcal{M} = H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$, c'est un $k[u]/u^p$ -module libre de rang fini, disons d , d'après le théorème 4.1.17. Pour tout $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$, $r \leq q \leq \frac{p}{e}$ le morphisme $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[q]}) \rightarrow \mathcal{M}$ est injectif d'après les propositions 4.1.14 et 4.1.16. Notons $\text{Fil}^q \mathcal{M}$ son image. On obtient ainsi une suite décroissante de sous- \tilde{S} -modules de \mathcal{M} .

Puisque la multiplication par u se factorise par $\text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \text{Fil}^{r+1/e} \mathcal{M} \rightarrow \text{Fil}^r \mathcal{M}$, on a $u\text{Fil}^r \mathcal{M} \subset \text{Fil}^{r+1/e} \mathcal{M}$. Par ailleurs, on a vu dans la preuve de la proposition 4.1.14 que $h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]}) = h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ et donc, par la proposition 4.1.14, le quotient $\text{Fil}^r \mathcal{M}/\text{Fil}^{r+1/e} \mathcal{M}$ est un k -espace vectoriel de dimension d . Or il en est de même de $\text{Fil}^r \mathcal{M}/u\text{Fil}^r \mathcal{M}$ (puisque $u^e \mathcal{M} \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$). Il en résulte que les k -espaces vectoriels $\text{Fil}^{r+1/e} \mathcal{M}$ et $u\text{Fil}^r \mathcal{M}$ ont même dimension. L'inclusion trouvée précédemment prouve qu'ils sont égaux.

De même en remplaçant r par $r + 1/e$ (et en vérifiant que la proposition 4.1.14 s'applique encore), on obtient $\text{Fil}^{r+2/e} \mathcal{M} = u\text{Fil}^{r+1/e} \mathcal{M} = u^2 \text{Fil}^r \mathcal{M}$. L'inégalité $er \leq p - 2$ et l'inclusion $u^e \mathcal{M} \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$ assurent que le quotient $\text{Fil}^r \mathcal{M}/\text{Fil}^{r+2/e} \mathcal{M} = \text{Fil}^r \mathcal{M}/u^2 \text{Fil}^r \mathcal{M}$ est libre de rang d sur $k[u]/u^2$.

Par ailleurs, on a une suite exacte longue :

$$H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}) \longrightarrow H^{i+1}(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]})$$

et d'après la proposition 4.1.14 les première et dernière flèches sont injectives. On en déduit que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]})$ s'identifie au quotient $\text{Fil}^r \mathcal{M}/\text{Fil}^{r+2/e} \mathcal{M}$ et donc qu'il est libre de rang fini sur $k[u]/u^2$. \square

Remarque. La preuve précédente implique en outre :

$$h^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) = ph^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+2/e]}) = 2ph^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[r+1/e]}) = 2ph^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}).$$

Avec cette dernière égalité, on peut refaire la démonstration de la proposition 4.1.11 et obtenir ainsi :

Proposition 4.1.19. *Pour tous entiers k et $i < \frac{p-1}{e}$, on a $H^i(u^k \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) = u^k H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}})$.*

Sans surprise, on dispose d'un analogue de la proposition 4.1.14 dans cette nouvelle situation :

Proposition 4.1.20. *Soient i un entier et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ vérifiant $0 \leq i < \frac{p-1}{e}$ et $i \leq q < E(\frac{p}{e}) + 1$ où $E(\frac{p}{e})$ désigne la partie entière de $\frac{p}{e}$. On a des suites exactes courtes :*

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow 0.$$

En outre, si s désigne la partie entière de q , on a également un début de suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) \longrightarrow H^{s+1}(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) .$$

Démonstration. Elle est très proche de celle de la proposition 4.1.14.

Puisque $q + \frac{1}{e} \leq \frac{2p}{e}$, les corollaires 3.3.6 et 3.3.5 impliquent les identifications $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]} \simeq \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[s+1/e]} \simeq \tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}$ où s désigne la partie entière de q . Ainsi, on obtient $h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[s]}/\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1/e]}) = h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ pour tout entier i . (La dernière égalité résulte du théorème 4.1.1.)

Par ailleurs, étant donné que $i < \frac{p-1}{e}$, une adaptation simple du lemme 4.1.13 fournit la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) \xrightarrow{u} H^i(u\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) \longrightarrow 0$$

et en adaptant la démonstration de la proposition 4.1.12, on montre que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]})$ est de dimension finie. Il s'ensuit l'égalité $h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) = h^i(u\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) + h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$. Par le lemme 3.3.7, on a la suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow u\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]} \longrightarrow \tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} \longrightarrow 0$$

et puisque $R\alpha_*\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]} = 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \omega_{\tilde{X}/\tilde{E}}^{s+1} \rightarrow \omega_{\tilde{X}/\tilde{E}}^{s+2} \rightarrow \dots$, on a $H^j(\tilde{\mathcal{J}}^{[s+1]}) = 0$ pour tout $j \leq s$ puis $H^i(u\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) = H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]})$. En particulier $h^i(u\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]})$ d'où il vient $h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) = h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) + h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]})$. On termine alors la démonstration en raisonnant par récurrence sur i . \square

On a finalement la proposition :

Proposition 4.1.21. *Pour tout $i \leq r$, l'application $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}})$ est injective.*

Démonstration. Il est possible d'adapter la démonstration de la proposition 4.1.16, mais nous pouvons également déduire l'énoncé de la proposition 4.1.16. En effet, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H^i(u^p\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}^{[r]}) \\ & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^i(u^p\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) \longrightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}) \end{array}$$

et la suite du bas est exacte d'après la proposition 4.1.19. Par la proposition 4.1.16, la flèche verticale de droite est injective. On vérifie facilement qu'il en est alors forcément de même de la flèche verticale centrale. D'où la proposition. \square

On en déduit finalement le théorème :

Théorème 4.1.22. *Pour tout $i \leq r$, le quadruplet $(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}), \phi_r, N)$ définit un objet de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$.*

Un objet de la catégorie \mathcal{M}^r On veut ici enfin prouver que $(H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ est un objet de \mathcal{M}^r pour tout $i \leq r$. Pour cela, on reprend à nouveau les arguments précédents.

On commence par prouver que $H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}})$ est un module libre (de rang fini) sur S_1 . D'après le théorème 4.1.1, il suffit de prouver que $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})$ est libre sur $k[u]/u^e$. Or le faisceau $\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}$ s'identifie à $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+1]}$ (corollaire 3.3.5) et il suffit donc de prouver que $H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+1]})$ est libre de rang fini sur $k[u]/u^e$. Pour cela, on adapte facilement les arguments de la preuve du théorème 4.1.18 en remplaçant les références aux propositions 4.1.14 et 4.1.16 respectivement par des références aux propositions 4.1.20 et 4.1.21, et en utilisant $h^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q+1/e]}) = h^i(\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}})$ pour $r \leq q < r+1$.

Lemme 4.1.23. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $q \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ tels que $q = 0$ ou $i \leq q < E(\frac{p}{e}) + 1$, la flèche $H^i(\mathcal{J}_1^{[q]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]})$ est surjective.*

Démonstration. On traite d'abord le cas $q = 0$. On a les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) &\simeq S_1 \otimes_{(\phi), k[u]/u^e} H^i(\mathcal{J}_1^{[i]}/\mathcal{J}_1^{[i+1]}) \\ H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) &\simeq \tilde{S}_{(2)} \otimes_{(\phi), k[u]/u^2} H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+2/e]}). \end{aligned}$$

On vérifie que la flèche $H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}})$ s'obtient à partir de la projection $S_1 \rightarrow \tilde{S}_{(2)}$ et du morphisme naturel $H^i(\mathcal{J}_1^{[i]}/\mathcal{J}_1^{[i+1]}) \rightarrow H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+2/e]})$. Il suffit donc de prouver que ce dernier est surjectif. Or, d'une part, le faisceau $\mathcal{J}_1^{[i]}/\mathcal{J}_1^{[i+1]}$ s'identifie à $\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+1]}$ (corollaire 3.3.5) et, d'autre part, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+1]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+1]}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+2/e]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[i+2/e]}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes : l'injectivité provient de la proposition 4.1.20 et la surjectivité provient de l'injectivité analogue sur les H^{i+1} (toujours conséquence de la même proposition). On en déduit directement la surjectivité de la flèche verticale de droite, ce qui conclut le cas $q = 0$.

Sinon, on considère le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} H^i(\tilde{\mathcal{J}}_1^{[q]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_1^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_1^{[q]}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[q]}) \end{array}$$

où les lignes sont exactes par les propositions 4.1.20 et 4.1.21. La flèche verticale de droite est un isomorphisme par le corollaire 3.3.5. La flèche verticale du milieu est surjective par ce qui précède. Une chasse au diagramme prouve facilement que la flèche verticale de gauche est aussi surjective, ce qui conclut. \square

On parvient finalement au but de tout ce paragraphe :

Théorème 4.1.24. *Pour tout $i \leq r$, le quadruplet $(H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^i((X_1)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ définit un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.*

Démonstration. Comme précédemment, il ne reste plus qu'à prouver que la flèche $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \rightarrow H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]})$ est surjective et que la flèche $H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}})$ est injective.

Pour le premier point, on considère le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}/\mathcal{J}_1^{[r+1]}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}/\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r+1]}) \end{array}$$

La flèche de droite est un isomorphisme (corollaire 3.3.5). La flèche de gauche est surjective (lemme 4.1.23), et celle du bas l'est également (proposition 4.1.20). On en déduit que celle du haut l'est aussi.

Pour le second point, on reprend les arguments de la preuve de la proposition 4.1.21. On raisonne à partir du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^{[r]} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{O}_1^{\text{st}} & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}} \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $K = u^{2p}\mathcal{O}_1^{\text{st}} + \text{Fil}^p S_1 \mathcal{O}_1^{\text{st}}$ et où les deux suites horizontales sont exactes. Il donne lieu à un nouveau diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} H^i(K) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{J}}_{(2)}^{[r]}) \\ & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^i(K) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}}) \end{array}$$

La suite du bas est exacte à gauche car, par le lemme 4.1.23, la flèche $H^{i-1}(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) \rightarrow H^{i-1}(\tilde{\mathcal{O}}_{(2)}^{\text{st}})$ est surjective. Mais la flèche verticale de droite est injective (proposition 4.1.21). On en déduit que la flèche verticale du milieu l'est également. Ceci termine la preuve. \square

4.1.4 Le cas $r = 0$

Tout au long de cette section, nous avons laissé de côté le cas $r = 0$ qui semble plus facile, mais qui est un peu à part car il n'impose aucune condition sur e , comme nous l'avons déjà souligné en 2.2.3.

Encore comme en 2.2.3, il est possible de traiter ce cas en utilisant les catégories intermédiaires $\widetilde{\mathcal{M}}_{(n)}^r$ et en montrant par récurrence sur n qu'en posant $\tilde{E}_{(n)} = \text{Spec } \tilde{S}_{(n)}$, le quadruplet :

$$(\mathcal{M} = H^0(\tilde{X}_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_{(n)}^{\text{st}}), \mathcal{M}, \phi, N_{\text{can}})$$

est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}_{(n)}^r$. On voit apparaître ici deux objets incongrus : le schéma \tilde{X} et l'opérateur de monodromie N_{can} . Expliquons rapidement à quoi ils correspondent.

Le schéma \tilde{X} est défini par $\tilde{X} = X_1/\pi^p$. Il est nécessaire de faire cette modification car si $e > pn$, on ne dispose pas de morphisme $T_1 \rightarrow \tilde{E}_{(n)}$ mais seulement d'un morphisme $T_1/\pi^p \rightarrow \tilde{E}_{(n)}$, et ainsi les faisceaux $\tilde{\mathcal{O}}^{\text{st}}$, *etc.* ne sont pas définis sur le site $(T_1)_{\text{syn}}$ mais juste sur $(T_1/\pi^p)_{\text{syn}}$. On notera toutefois que cela ne prêche pas à conséquence pour la définition de ϕ_0 : en effet, on a pas besoin ici de diviser par une puissance de p , ni donc de monter sur $(T_2)_{\text{syn}}$.

Par ailleurs, un raisonnement facile à partir de la proposition 2.2.8 indique que sur tout module libre de type fini sur S_1 muni d'un opérateur ϕ_0 vérifiant les axiomes de la définition $\underline{\mathcal{M}}^{r,p}$, il existe un *unique* opérateur N qui en fait un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,p}$. On montre de même que le résultat reste vrai si S_1 (resp. $\underline{\mathcal{M}}^{r,p}$) est remplacé par $\tilde{S}_{(n)}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{M}}_{(n)}^r$). C'est ce morphisme qui nous avons noté N_{can} . En particulier, on constate que, dans le cas $r = 0$, il n'est pas nécessaire de s'encombrer de l'opérateur de monodromie sur les faisceaux log-syntomiques.

Les arguments utilisés pour mener à bien la récurrence sont identiques à ceux qui ont déjà été détaillés deux fois précédemment. Une fois le résultat connu pour $n = e$, on déduit à nouveau par la même méthode que le quadruplet :

$$(\mathcal{M} = H^0(\tilde{X}_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{\text{st}}), \mathcal{M}, \phi, N_{\text{can}})$$

est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{r,p}$. Il s'agit pour finir de justifier que le groupe de cohomologie $H^0(\tilde{X}_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{\text{st}})$ est isomorphe à $H^0((X_1)_{\text{syn}}, \tilde{\mathcal{O}}_1^{\text{st}})$, et que N_{can} s'identifie à l'opérateur N défini sur le faisceau $\mathcal{O}_1^{\text{st}}$. Le premier point résulte simplement de l'isomorphisme fondamental de rigidité de la cohomologie cristalline :

$$H^0((\tilde{X}/E_1)_{\text{CRIS}}, \mathcal{O}_{\tilde{X}/E_1}) \simeq H^0((X_1/E_1)_{\text{CRIS}}, \mathcal{O}_{X_1/E_1})$$

tandis que le second point résulte de l'unicité du N vérifiant les axiomes de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Pour $n = 1$, il est certainement possible d'obtenir une version faisceautique de l'isomorphisme du lemme 2.2.7 qui conduirait à une démonstration alternative. Il ne semble pas clair à l'auteur que cet isomorphisme faisceautique puisse se généraliser au cas $n > 1$. Toutefois, si tel est le cas, il devrait être possible d'obtenir le résultat convoité pour tout n , toujours dans le cas $r = 0$.

4.2 Dévissages

Le but de cette partie est de déduire à partir du cas $n = 1$ traité précédemment le cas n quelconque, c'est-à-dire d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 4.2.1. *Pour tout $i < r$ et tout entier n , le quadruplet :*

$$(H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$$

définit un objet de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$.

Lemme 4.2.2. *Soit \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ un sous- S -module stable par N . On suppose s'être donné également $\text{Fil}^r \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}' \cap \text{Fil}^r \mathcal{M}$ contenant $\text{Fil}^r S \mathcal{M}'$ tel que $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M}')$ est inclus dans \mathcal{M}' et l'engendre. Alors \mathcal{M}' est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.*

Démonstration. La preuve est la même que celle du lemme 2.3.1.1 de [Bre98], à ceci près que le cas des objets annulés par p est plus subtil. Si $e = 1$, il n'y a rien à faire de plus. On suppose $e \geq 2$. Considérons donc \mathcal{M} un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ tué par p et notons $\tilde{\mathcal{M}}$ et $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ les images de \mathcal{M} dans les catégories $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et $\widetilde{\mathcal{M}}_{(2)}^r$ respectivement. On définit également le sous-module $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}'$ (resp. $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}'_{(2)}$) comme l'image de \mathcal{M}' dans $\tilde{\mathcal{M}}'$ (resp. $\tilde{\mathcal{M}}'_{(2)}$). Par l'argument de *loc. cit.*, $\tilde{\mathcal{M}}'$ est un objet de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ et comme les morphismes de $\widetilde{\mathcal{M}}^r$ sont strictement compatibles à la filtration, il vient $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}' = \tilde{\mathcal{M}}' \cap \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$.

Considérons $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_d$ une base adaptée de $\tilde{\mathcal{M}}'$ pour les entiers n_1, \dots, n_d et notons $e_i \in \tilde{\mathcal{M}}'_{(2)}$ un relevé de \tilde{e}_i . Notons également $f_i \in \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}'_{(2)}$ un relevé de $u^{n_i} e_i$. Tout $x \in \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}'_{(2)}$ s'écrit :

$$x = a_1 f_1 + \dots + a_d f_d + u^p y$$

pour $a_i \in \tilde{S}_{(2)}$ et $y \in \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$. Alors $\phi_r(x) = \phi(a_1) \phi_r(f_1) + \dots + \phi(a_d) \phi_r(f_d)$ et donc la famille des $\phi_r(f_i)$ engendre $\tilde{\mathcal{M}}'_{(2)}$. De plus, modulo u^p , cette famille peut être complétée en une base de $\tilde{\mathcal{M}}$. En relevant cette base, on parvient à compléter la famille des $\phi_r(f_i)$ en une famille génératrice

de $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$. Comme en outre, cette dernière a pour cardinal le rang de $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ sur $\tilde{\mathcal{S}}_{(2)}$, c'en est nécessairement une base. Il s'ensuit que la sous-famille des $\phi_r(f_i)$ est libre sur $\tilde{\mathcal{S}}_{(2)}$. On en déduit que $\tilde{\mathcal{M}}'_{(2)}$ est un $\tilde{\mathcal{S}}_{(2)}$ -module libre.

Finalement, en répétant à nouveau l'argument, on parvient à prouver la liberté de \mathcal{M}' , ce qui suffit pour conclure. \square

Prouvons à présent le théorème 4.2.1. On raisonne par récurrence sur n . L'initialisation est donnée par le théorème 4.1.24. Pour l'hérédité, on considère les suites exactes courtes suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{J}_1^{[r]} \xrightarrow{p^n} \mathcal{J}_{n+1}^{[r]} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[r]} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \mathcal{O}_1^{\text{st}} \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}_{n+1}^{\text{st}} \longrightarrow \mathcal{O}_n^{\text{st}} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Elles fournissent deux suites exactes longues de cohomologie qui s'insèrent dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} H^{i-1}(\mathcal{J}_n^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_{n+1}^{[r]}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}) & \longrightarrow & H^{i+1}(\mathcal{J}_1^{[r]}) \\ \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow \\ H^{i-1}(\mathcal{O}_n^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_{n+1}^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_n^{\text{st}}) & \longrightarrow & H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{\text{st}}) \end{array}$$

où tous les groupes de cohomologie sont calculés sur le site $(X_n)_{\text{syn}}$. Par hypothèse de récurrence, les deux quadruplets $(H^{i-1}(\mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^{i-1}(\mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$ et $(H^i(\mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ sont des objets de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$. Comme celle-ci est abélienne, il en est de même de leur image que l'on note $(\mathcal{M}', \text{Fil}^r \mathcal{M}', \phi_r, N)$. De même, les deux quadruplets $(H^i(\mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N)$ et $(H^{i+1}(\mathcal{O}_1^{\text{st}}), H^{i+1}(\mathcal{J}_1^{[r]}), \phi_r, N)$ sont des objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$, le premier en vertu de l'hypothèse de récurrence et le second par le théorème 4.1.24. Leur noyau $(\mathcal{M}'', \text{Fil}^r \mathcal{M}'', \phi_r, N)$ est donc aussi objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

En outre, on dispose d'un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Fil}^r \mathcal{M}' & \longrightarrow & H^i(\mathcal{J}_{n+1}^{[r]}) & \longrightarrow & \text{Fil}^r \mathcal{M}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow & & \phi_r \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \longrightarrow & H^i(\mathcal{O}_{n+1}^{\text{st}}) & \longrightarrow & \mathcal{M}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les deux lignes horizontales sont exactes. Une adaptation directe du lemme 2.3.1.2 de [Bre98] (utilisant le lemme 4.2.2) entraîne alors que $(H^i(\mathcal{O}_{n+1}^{\text{st}}), H^i(\mathcal{J}_{n+1}^{[r]}), \phi_r, N)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$, ce qui achève la récurrence.

Remarques. Il est fort probable que le théorème précédent reste vrai lorsque $i = r$, mais ce cas particulier échappe à la preuve que l'on vient de donner.

L'auteur remercie le referee pour lui avoir fourni une démonstration alternative (plus directe) de l'adaptation du lemme 2.3.1.2 de [Bre98]. Pour ne pas encore allonger cet article, nous ne la reproduisons pas ici.

Le cas entier

Après avoir obtenu un théorème modulo p^n pour tout entier n , il est tentant de passer à la limite projective. Précisément, posons, au moins pour $i < r$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \varprojlim_{n \geq 1} H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}) \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} &= \varprojlim_{n \geq 1} H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}).\end{aligned}$$

Les applications ϕ_r et N passent à la limite pour finir respectivement des applications $\text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ que l'on note encore ϕ_r et N .

Soit $\mathcal{M}_{\text{tors}}$ l'ensemble des éléments de \mathcal{M} tué par une puissance de p , et $\mathcal{M}_{\text{free}} = \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\text{tors}}$. On munit sans problème ces modules d'un Fil^r , d'un ϕ_r et d'un N , et en copiant les arguments du paragraphe 4.1 de [Bre98], on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.2.3. *i) Le module $\mathcal{M}_{\text{tors}}$ muni des structures supplémentaires est un objet de \mathcal{M}^r .*

ii) Le module $\mathcal{M}_{\text{free}}$ muni des structures supplémentaires est un module fortement divisible¹³.

5 Calcul de la cohomologie étale

On conserve les notations introduites jusqu'alors. Le but de cette partie est de démontrer le théorème 1.1, dont nous précisons l'énoncé :

Théorème 5.0.4. *Pour tout entier r tel que $er < p-1$, pour tout entier n et pour tout $0 \leq i < r$ (et aussi $i = r$ si $n = 1$), on a un isomorphisme canonique de modules galoisiens :*

$$H^i((X_{\bar{K}})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})(r) \xrightarrow{\sim} T_{\text{st}\star}(H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{st}}), H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N).$$

Fixons avant tout quelques notations. Si L est une extension algébrique de K , définissons $T_L = (\text{Spec } \mathcal{O}_L, \mathcal{O}_L \setminus \{0\})$ et si n est un entier et Y est un log-schéma sur T , posons $Y_n = Y \times_T T_n$, $Y_L = Y \times_T T_L$ et $Y_{n,L} = Y_n \times_T T_L = Y_L \times_T T_n$.

Le premier (et principal) ingrédient de la preuve est un résultat de Kato et Tsuji qui s'énonce comme suit :

Théorème 5.0.5. *Pour $0 \leq i \leq s \leq p-2$, on a des isomorphismes canoniques compatibles à l'action de Galois :*

$$H^i((X_{n,\bar{K}})_{\text{ét}}, s_{n,X_{\bar{K}}}^{\text{log}}(s)) \xrightarrow{\sim} H^i((X_{\bar{K}})_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})(s).$$

Dans le théorème précédent, $s_{n,X_{\bar{K}}}^{\text{log}}(s)$ désigne un certain complexe de faisceaux étales sur $X_{n,\bar{K}}$ construit par Kato (voir [Kat87]). Ce théorème est prouvé dans [Tsu00] dans un contexte plus général : pour un schéma X log-lisse (mais dont la fibre spéciale n'est pas nécessairement du type de Cartier), la conclusion demeure en remplaçant dans l'énoncé $X_{\bar{K}}$ par $X_{\text{triv},\bar{K}}$ où X_{triv} désigne le lieu sur lequel la log-structure est triviale. Par ailleurs, Breuil démontre le théorème suivant :

¹³Pour une définition, on pourra se reporter à [Bre99].

Théorème 5.0.6. *Pour tout entier i , et tout $s \in \{0, \dots, p-1\}$, on a des isomorphismes canoniques compatibles à l'action de Galois :*

$$\varinjlim_L H^i((X_{n+s,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^s) \xrightarrow{\sim} H^i((X_{n,\bar{K}})_{ét}, \mathcal{S}_{n,X_{\bar{K}}}^{log}(s))$$

où la limite inductive est prise sur toutes les extensions finies L de K .

Ici, \mathcal{S}_n^s désigne un certain faisceau sur le site log-syntomique dont le rappel de la définition est l'objet du paragraphe 5.1. Forts de cela, il ne reste plus pour conclure qu'à prouver :

Proposition 5.0.7. *Pour $0 \leq i < r$ (et aussi $i = r$ lorsque $n = 1$), on a des isomorphismes canoniques compatibles à l'action de Galois :*

$$\varinjlim_L H^i((X_{n+r,L})_{syn}, \mathcal{S}_n^r) \xrightarrow{\sim} T_{st\star}(H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st}), H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[r]}), \phi_r, N). \quad (16)$$

La démonstration de cette proposition est l'objet du paragraphe 5.2. Finalement, le paragraphe 5.3 qui termine cette partie explique comment on déduit des résultats précédents le théorème 1.2.

5.1 Les faisceaux \mathcal{S}_n^s

À partir de maintenant, on est de nouveau amené à manipuler les faisceaux \mathcal{O}_n^{cris} et $\mathcal{J}_n^{[s],cris}$ défini en 3.2. Le faisceau \mathcal{S}_n^s est défini comme le noyau du morphisme $\phi_s - \text{id} : \mathcal{J}_n^{[s],cris} \rightarrow \mathcal{O}_n^{cris}$. La proposition suivante réunit les suites exactes fondamentales que l'on aura à manipuler par la suite :

Proposition 5.1.1. *Pour tous entiers $s \geq 0$ et $n \geq 1$, on a une suite exacte courte de faisceaux sur le site $(T_n)_{syn}$:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[s],cris} \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[s]} \xrightarrow{N} \mathcal{J}_n^{[s-1]} \longrightarrow 0.$$

Pour tout entier $s \in \{0, \dots, p-1\}$ et $n \geq 1$, on a une suite exacte courte de faisceaux sur le site $(T_{n+s})_{syn}$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_n^s \longrightarrow \mathcal{J}_n^{[s],cris} \xrightarrow{\phi_s - \text{id}} \mathcal{O}_n^{cris} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. On a rappelé la première suite exacte par commodité mais elle a déjà été prouvé dans la proposition 3.4.2. L'exactitude de la seconde suite est exactement le contenu de la proposition 3.1.4.1 de [Bre98]. \square

5.2 La preuve

Le but de ce chapitre est de donner une preuve de la proposition 5.0.7, ce qui est suffisant comme nous l'avons expliqué, pour démontrer le théorème 1.1. On suit de très près la démonstration de [Bre98] valable pour le cas $e = 1$.

On note $\mathcal{M} = H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{O}_n^{st})$. Pour tout entier t , on a un morphisme (pas nécessairement injectif) $H^i((X_n)_{syn}, \mathcal{J}_n^{[t]}) \rightarrow \mathcal{M}$ et on note $\text{Fil}^t \mathcal{M}$ son image. On vérifie que l'on obtient ainsi

une filtration admissible (voir définition 2.3.3) sur \mathcal{M} . Par définition (voir paragraphe 2.3.3), le membre de droite de l'isomorphisme (16) s'identifie à :

$$\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$$

avec :

$$\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) = \sum_{t=0}^r \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathrm{Fil}^{s-t} \mathcal{M}$$

où on rappelle que les Fil_X^t sont définis par la formule (2) et qu'ils sont plats sur S_n . On rappelle également que l'on dispose du lemme 2.3.4 qui permet de voir le module $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$ comme le conoyau d'un morphisme.

La preuve de la proposition 5.0.7 passe par les calculs successifs des modules $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$, $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$ et finalement $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1} = T_{\mathrm{st}\star}(\mathcal{M})$. Ceux-ci sont traités respectivement dans les paragraphes 5.2.2, 5.2.3 et 5.2.4. Le paragraphe 5.2.1, quant à lui, rappelle quelques préliminaires nécessaires pour la gestion des limites inductives.

5.2.1 Le foncteur j_\star

Dans ce paragraphe, on rappelle comment construire des faisceaux sur le site $(X_n)_{\mathrm{syn}}$ dont la cohomologie s'identifie à $\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]})$.

Si L est une extension de K , on a un morphisme canonique $j_L : T_L \rightarrow T$. On montre (lemme 3.1.1.1 de [Bre98]) qu'il est log-syntomique et donc qu'il induit un morphisme de topoi $(\widetilde{T}_{n,L})_{\mathrm{syn}} \rightarrow (\widetilde{T}_n)_{\mathrm{syn}}$. Soit \mathcal{F} un faisceau de groupes abéliens sur $(T_n)_{\mathrm{syn}}$. Pour tout L , on considère le faisceau $j_{L\star} j_L^* \mathcal{F}$ et on remarque que si L' est une extension finie de L , on a un morphisme $j_{L\star} j_L^* \mathcal{F} \rightarrow j_{L'\star} j_{L'}^* \mathcal{F}$. On pose finalement :

$$j_\star \mathcal{F} = \varinjlim_L j_{L\star} j_L^* \mathcal{F}.$$

C'est un faisceau sur $(T_n)_{\mathrm{syn}}$ et on montre (corollaire 3.1.1.4 de [Bre98]) que l'on a une identification canonique :

$$\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]}) = H^i((X_n)_{\mathrm{syn}}, j_\star \mathcal{J}_n^{[s]})$$

pour tout entier s .

5.2.2 Le calcul de $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$

Le but de ce paragraphe est de donner une description en terme de conoyau (analogue à celle du lemme 2.3.4) de $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})$. Pour cela, on commence par rappeler que l'anneau \hat{A}_{st} admet une interprétation cohomologique incarnée par l'isomorphisme canonique suivant :

$$\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n = \varinjlim_L H^0((T_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{st}})$$

où la limite inductive est prise sur les extensions finies L de K . Il existe aussi un isomorphisme analogue pour décrire la filtration sur \hat{A}_{st} qui est :

$$\mathrm{Fil}^t(\hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n) = \mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n = \varinjlim_L H^0((T_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[t]}).$$

Ces isomorphismes permettent de construire une application canonique :

$$\mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^0((X_n)_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s-t]}) \rightarrow \varinjlim_L H^0((X_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s]}) = H^0((X_n)_{\mathrm{syn}}, j_* \mathcal{J}_n^{[s]})$$

et donc un morphisme de faisceaux :

$$\bigoplus_{t=0}^s \mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s-t]} \rightarrow \bigoplus_{t=0}^s \mathrm{Fil}^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s-t]} \rightarrow j_* \mathcal{J}_n^{[s]}.$$

On a alors le lemme suivant, à mettre en parallèle avec le lemme 2.3.4 :

Lemme 5.2.1. *Pour tout entier $s \leq r$, on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s+1-t]}) & \longrightarrow & \bigoplus_{t=0}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s-t]}) & \longrightarrow & H^i(j_* \mathcal{J}_n^{[s]}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathrm{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} & \longrightarrow & \bigoplus_{t=0}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathrm{Fil}^{s-t} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathrm{Fil}^s(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où tous les morphismes respectent l'action de Galois, et où les deux lignes sont exactes et les flèches verticales surjectives. (Notez que tous les groupes de cohomologie sont calculés sur le site $(X_n)_{\mathrm{syn}}$.)

Démonstration. Tout d'abord, précisons les flèches. Dans la suite exacte du bas, la première flèche a déjà été définie dans l'énoncé du lemme 2.3.4. La flèche correspondante dans la suite exacte du haut a une définition tout à fait analogue. Les autres flèches ne posent pas de problème, à part *a priori* la flèche verticale de droite. Cependant, elle n'en posera plus lorsque l'on aura prouvé l'exactitude des deux suites (puisque ce sera alors simplement la flèche induite sur les conoyaux).

L'exactitude de la ligne du bas n'est autre que l'objet du lemme 2.3.4. Les surjectivités des deux premières flèches verticales sont immédiates. Il ne reste donc plus qu'à prouver l'exactitude de la suite exacte du haut (de laquelle résultera directement la surjectivité de la flèche verticale de droite).

On commence par prouver que la suite de faisceaux sur le site $(T_n)_{\mathrm{syn}}$:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{t=1}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s+1-t]} \longrightarrow \bigoplus_{t=0}^s \mathrm{Fil}_X^t \hat{A}_{\mathrm{st}}/p^n \otimes_{S_n} \mathcal{J}_n^{[s-t]} \longrightarrow j_* \mathcal{J}_n^{[s]} \longrightarrow 0$$

est exacte. En utilisant un analogue du corollaire 3.1.1.3 de [Bre98], on se ramène par un dévissage, au cas $n = 1$. De plus, en recopiant les arguments de la preuve de la proposition 3.1.2.3 de [Bre98], on se ramène au cas $s = 0$. Il s'agit donc de montrer que $\hat{A}_{\mathrm{st}}/p \otimes_{S_1} \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}} \simeq j_* \mathcal{O}_1^{\mathrm{st}}$. C'est à nouveau un calcul local pour la topologie log-syntomique, en tout point analogue à celui mené dans la démonstration du lemme 3.1.2.2 de [Bre98]. \square

5.2.3 Le calcul de $\mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$

Le but de cette partie est de démontrer le lemme suivant qui constitue la deuxième étape de la preuve.

Lemme 5.2.2. *On a des isomorphismes de modules galoisiens :*

$$\begin{aligned} \varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}) &\xrightarrow{\sim} (\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \\ \varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\mathrm{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r], \mathrm{cris}}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^r(\hat{A}_{\mathrm{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle du corollaire 3.2.3.5 de [Bre98]. Nous redonnons simplement les grandes lignes. Tout d'abord, de la nullité de $\varinjlim_L R^i j_{L*} j_L^* \mathcal{J}_n^{[s], \text{cris}}$ prouvée dans le lemme 3.1.1.2 de [Bre98], on déduit à partir de la première suite exacte de la proposition 5.1.1, une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow j_* \mathcal{J}_n^{[s], \text{cris}} \longrightarrow j_* \mathcal{J}_n^{[s]} \xrightarrow{N} j_* \mathcal{J}_n^{[s-1]} \longrightarrow 0$$

de laquelle on déduit une suite exacte courte sur les groupes de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^i(j_* \mathcal{J}_n^{[s], \text{cris}}) \longrightarrow H^i(j_* \mathcal{J}_n^{[s]}) \xrightarrow{N} H^i(j_* \mathcal{J}_n^{[s-1]}) \longrightarrow 0$$

où tous les groupes de cohomologie sont calculés sur le site $(X_n)_{\text{syn}}$ (l'argument est le même que celui utilisé pour la proposition 3.2.3.1 de [Bre98]).

La suite de la preuve consiste à reprendre le diagramme du lemme 5.2.1 et à procéder à une étude relativement fine des noyaux des flèches verticales. Précisément, si on note :

$$\begin{aligned} K^t &= \ker(H^i(\mathcal{J}_n^{[t]}) \rightarrow H^i(\mathcal{O}_n^{\text{st}})) = \ker(H^i(\mathcal{J}_n^{[t]}) \rightarrow \text{Fil}^t \mathcal{M}) \\ \bar{K}^t &= \ker(H^i(j_* \mathcal{J}_n^{[t]}) \rightarrow \text{Fil}^t(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})) \end{aligned}$$

on peut compléter le diagramme de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} K^{s+1-t} & \longrightarrow & \bigoplus_{t=0}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} K^{s-t} & \longrightarrow & \bar{K}^s \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s+1-t]}) & \longrightarrow & \bigoplus_{t=0}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} H^i(\mathcal{J}_n^{[s-t]}) & \longrightarrow & H^i(j_* \mathcal{J}_n^{[s]}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{t=1}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} \text{Fil}^{s+1-t} \mathcal{M} & \longrightarrow & \bigoplus_{t=0}^s \text{Fil}_X^t \hat{A}_{\text{st}}/p^n \otimes_{S_n} \text{Fil}^{s-t} \mathcal{M} & \longrightarrow & \text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

L'opérateur N induit une application $N : \bar{K}^s \rightarrow \bar{K}^{s-1}$ pour tout $s \in \{0, \dots, r\}$ en convenant que $K^{-1} = K^0$. La suite exacte du haut implique en prenant $s = 0$ que $\bar{K}^0 = 0$. Par ailleurs, une étude un peu minutieuse de cette même suite exacte (voir lemmes 3.2.3.3 et 3.2.3.4 de [Bre98]) montre que l'application $N : \bar{K}^r \rightarrow \bar{K}^{r-1}$ est un isomorphisme.

En considérant la suite exacte de droite, ceci implique que pour $s = 0$ et $s = r$, on a des isomorphismes :

$$\varinjlim_L H^i((X_{n,L})_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[s], \text{cris}}) = H^i((X_n)_{\text{syn}}, j_* \mathcal{J}_n^{[s], \text{cris}}) \xrightarrow{\sim} \text{Fil}^s(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

5.2.4 Le calcul de $\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}^{\phi_r=1}$

Il n'est plus difficile à présent de terminer la preuve de la proposition 5.0.7. En effet, la deuxième suite exacte de la proposition 5.1.1 nous fournit une suite exacte longue :

$$\dots \longrightarrow H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r], \text{cris}}) \xrightarrow{\phi_r - \text{id}} H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \longrightarrow \dots$$

et puis, comme le foncteur \varinjlim_L est exact (la limite est filtrante) on obtient une nouvelle suite exacte longue :

$$\cdots \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r], \text{cris}}) \xrightarrow{\phi_r - \text{id}} \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \longrightarrow \cdots$$

Par ailleurs, la flèche $\phi_r - \text{id} : \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r], \text{cris}}) \rightarrow \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}})$ s'identifie *via* les isomorphismes du lemme 5.2.2 à la flèche :

$$\text{Fil}^r(\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0} \xrightarrow{\phi_r - \text{id}} (\hat{A}_{\text{st}} \otimes_S \mathcal{M})_{N=0}$$

et on sait par le lemme 2.3.9 que celle-ci est surjective. On en déduit que la suite exacte longue se coupe en suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_{n+r})_{\text{syn}}, \mathcal{S}_n^r) \longrightarrow \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{J}_n^{[r], \text{cris}}) \xrightarrow{\phi_r - \text{id}} \varinjlim_L H^i((X_n)_{\text{syn}}, \mathcal{O}_n^{\text{cris}}) \longrightarrow 0$$

ce qui termine la preuve.

5.2.5 Le cas $r = 0$

Si l'on utilise l'équivalence de catégories donnée par la proposition 2.2.8 et la traduction correspondante du foncteur T_{st} donnée par le corollaire 2.3.14, il est possible comme l'a remarqué le referee d'obtenir un énoncé analogue au théorème 1.1 valable pour tout n dans le cas $r = 0$, à savoir :

Théorème 5.2.3. *Soit \underline{W}_n le log-schéma $\text{Spec } W_n$ muni de la log-structure associée à $\text{Nu} \rightarrow W_n$, $u \mapsto 0$. Soient X un schéma propre et semi-stable sur \mathcal{O}_K , $\bar{X} = X \times_T \bar{T}$ et $X_{\bar{K}} = X \times_{\mathcal{O}_K} \bar{K}$. Alors $H_{\text{cris}}^0(\bar{X}/\underline{W}_n)$ est un W_n -module de type fini, le Frobenius induit un automorphisme ϕ sur ce groupe de cohomologie et on a un isomorphisme canonique :*

$$H_{\text{ét}}^0(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq (H_{\text{cris}}^0(\bar{X}/\underline{W}_n) \otimes_{W_n} W_n(\bar{k}))^{\phi \otimes \phi = 1}$$

pour tout entier n .

Démonstration. Pour tout log-schéma S au-dessous de $\text{Spec } \mathcal{O}_K$ muni de la log-structure définie par la fibre spéciale, notons $X_S = X \times_{\mathcal{O}_K} S$. Ainsi en particulier \bar{X} est le schéma sous-jacent à $X_{\bar{k}}$. Le théorème de changement de base propre fournit :

$$H_{\text{ét}}^0(\dot{X}_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \simeq H_{\text{ét}}^0(\dot{X}_{\bar{k}}, i^* j_* \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

où i et j désignent respectivement les inclusions de $\dot{X}_{\bar{k}}$ et de $\dot{X}_{\bar{K}}$ dans $\dot{X}_{\mathcal{O}_{\bar{K}}}$. Comme $\dot{X}_{\mathcal{O}_L}$ est normal et plat sur \mathcal{O}_L pour toute extension finie L de K contenue dans \bar{K} , on a $i^* j_* \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} H_{\text{cris}}^0(\bar{X}/\underline{W}_n) \otimes_{W_n} W_n(\bar{k}) &\simeq H_{\text{cris}}^0(\bar{X}/\underline{W}_n(\bar{k})) \\ &\simeq \ker(d : H_{\text{ét}}^0(\dot{X}_{\bar{k}}, W_n \mathcal{O}_{\dot{X}_{\bar{k}}}) \rightarrow H^0(\dot{X}_{\bar{k}}, W_n \Omega_{\dot{X}_{\bar{k}}/\bar{k}}^1)) \end{aligned}$$

et l'on souhaite calculer les points fixes par le Frobenius sur ce dernier groupe. Mais la suite exacte d'Artin-Schreier-Witt $0 \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rightarrow W_n \mathcal{O}_{\dot{X}_{\bar{k}}} \rightarrow W_n \mathcal{O}_{\dot{X}_{\bar{k}}} \rightarrow 0$ (où la dernière flèche nulle est $\text{id} - \phi$) implique que le résultat s'identifie à $H_{\text{ét}}^0(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$. Le théorème en résulte.

□

Remarque. L'auteur suppose très fortement, mais ne sait pas prouver, que le théorème 1.1 reste valable tel quel pour le cas $r = 0$ et n quelconque. Comme cela a été déjà mentionné en 4.1.4, ceci pourrait résulter d'une version faisceautique de l'isomorphisme du lemme 2.2.7 qui ne semble pas si facile à dégager. D'un tel isomorphisme, il devrait résulter également que les deux objets cohomologiques associés à X dans les deux versions du théorème se correspondent *via* le foncteur de réduction modulo κ (voir paragraphe 2.2.3).

5.3 Une conjecture de Serre

On montre dans ce paragraphe comment la théorie développée au long de cet article permet de résoudre complètement la conjecture de l'inertie modérée de Serre formulée dans le paragraphe 1.13 de [Ser72].

Avant de rappeler l'énoncé de la conjecture, faisons quelques préliminaires et profitons-en pour fixer les notations (pour plus de précisions, voir le paragraphe 1 de [Ser72]). Soit V une \mathbb{F}_p -représentation de dimension finie irréductible du sous-groupe d'inertie I de groupe de Galois absolu de K . Par un résultat classique de théorie des groupes, du fait que V a pour cardinal un multiple de p , le sous-groupe d'inertie sauvage (qui est un pro- p -groupe distingué) agit trivialement. Ainsi l'action de I se factorise à travers une action du groupe d'inertie modérée I_t .

Par ailleurs, puisque V est supposée irréductible, l'anneau E des endomorphismes équivariants de V est un corps fini et V hérite d'une structure d'espace vectoriel de dimension 1 sur ce corps. La représentation de départ fournit un caractère $\rho : I_t \rightarrow E^*$. Notons $q = p^h$ le cardinal de E et \mathbb{F}_q le sous-corps de \bar{k} formé des solutions de l'équation $x^q = x$. On dispose de l'application suivante appelée *caractère fondamental de niveau h* :

$$\begin{aligned} \theta_h : I_t &\rightarrow \mu_{q-1}(\bar{K}) \simeq \mathbb{F}_q^* \\ g &\mapsto \frac{g(\eta)}{\eta} \end{aligned}$$

où η désigne une racine $(q - 1)$ -ième de l'uniformisante π .

Les corps E et \mathbb{F}_q sont finis de même cardinal et donc isomorphes (non canoniquement). Si l'on compose θ_h par un tel isomorphisme f , on obtient une application $\theta_{h,f} : I_t \rightarrow E^*$ et on montre facilement (voir la proposition 5 du paragraphe 1 de [Ser72]), que $\rho = \theta_{h,f}^n$ pour un certain entier n compris entre 0 et $q - 2$. L'entier n dépend de l'isomorphisme f choisi mais les chiffres de son écriture en base p , eux, n'en dépendent pas. Ce sont par définition les *exposants de l'inertie modérée* de la représentation V .

La conjecture de Serre s'énonce alors comme suit :

Théorème 5.3.1. *Soit X un schéma propre et lisse sur K à réduction semi-stable sur \mathcal{O}_K et soit r un entier. Les exposants de l'inertie modérée sur un quotient de Jordan-Hölder de la restriction au groupe d'inertie de la représentation galoisienne $H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\vee$ (où « \vee » désigne le dual) sont compris entre 0 et er .*

Démonstration. On remarque dans un premier temps que le résultat est évident si $er \geq p - 1$ (des chiffres en base p sont nécessairement inférieurs ou égaux à $p - 1$) ou si $r = 0$. On peut donc supposer que ce n'est pas le cas et appliquer les résultats de cet article.

Par le théorème 1.1, la représentation galoisienne $V = H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})(r)$ est dans l'image essentielle du foncteur $T_{\text{st}\star}$. Puisque cette image essentielle est stable par sous-objets et quotients (théorème 2.3.1), tout quotient de Jordan-Hölder de V est également dans l'image essentielle

de $T_{\text{st}\star}$. Par ailleurs, un tel quotient de Jordan-Hölder est par définition irréductible et donc ne peut être l'image par $T_{\text{st}\star}$ que d'un objet simple.

Le théorème résulte à ce niveau du théorème 5.2.2 de [Car06]. \square

Remarque. On a un résultat équivalent avec les groupes de cohomologie $H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\vee$. On ne peut pas utiliser directement le théorème de comparaison établi dans cet article car il impose la restriction $i < r$ si $n > 1$. Cependant, à partir de la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z} \rightarrow 0$ (la première flèche non nulle est la multiplication par p^{n-1} et la seconde la réduction modulo p) on obtient le morceau de suite exacte longue de cohomologie suivant :

$$H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) \rightarrow H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z}).$$

On en déduit que les quotients de Jordan-Hölder de $H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ se retrouvent soit dans ceux de $H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ soit dans ceux de $H_{\text{ét}}^r(X_{\bar{K}}, \mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z})$, ce qui permet de conclure par récurrence.

Bibliographie

- [Art62] M. Artin, *Grothendieck topologies. Notes on a seminar*, Cambridge Mass. (1962)
- [Ber74] P. Berthelot, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique p* , Lecture notes in Math. **407** (1974)
- [BM02] C. Breuil et W. Messing, *Torsion étale and crystalline cohomologies*, Astérisque **279**, Soc. Math. France (2002), 81–124
- [BO78] P. Berthelot et A. Ogus, *Notes on crystalline cohomology*, Princeton University Press, Princeton (1978)
- [Bre96] C. Breuil, *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline, et cohomologie de Čech*, Bull. **124**, Soc. Math. France (1996), 587–647
- [Bre97a] ———, *Construction de représentations p -adiques semi-stables*, Ann. Scient. ENS. **31** (1997), 281–327
- [Bre97b] ———, *Représentations p -adiques semi-stables et transversalité de Griffiths*, Math. Annalen **307** (1997), 191–224
- [Bre98] ———, *Cohomologie étale de p -torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke mathematical journal **95** (1998), 523–620
- [Bre99] ———, *Représentation semi-stables et modules fortement divisibles*, Invent. Math. **136** (1999), 89–122
- [Car06] X. Caruso, *Représentations p -adiques semi-stables dans le cas $er < p - 1$* , J. reine. angew. Math. **594** (2006), 35–92
- [Fal92] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p -adic Galois representations*, Journal of algebraic geometry **1** (1992), 61–82
- [Fal99] ———, *Integral crystalline cohomology over very ramified valuations rings*, J. Amer. Math. Soc **12** (1999), 117–144
- [FL82] J.M. Fontaine et G. Laffaille, *Construction de représentations p -adiques*, Ann. Scient. ENS. **15** (1982), 547–608
- [FM87] J.M. Fontaine et W. Messing, *p -adic periods and p -adic étale cohomology*, Contemporary Math. **67** (1987), 179–207

- [Fon91] J.M. Fontaine, *Représentations p -adiques des corps locaux*, Grothendieck Festschrift II , Birkhäuser, Boston (1991), 249–309
- [Fon94a] ———, *Le corps des périodes p -adiques*, Astérisque **223**, Soc. Math. France (1994), 59–111
- [Fon94b] ———, *Représentations p -adiques semi-stables*, Astérisque **223**, Soc. Math. France (1994), 113–184
- [HK94] O. Hyodo et K. Kato, *Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles*, Astérisque **223**, Soc. Math. France (1994), 221–268
- [Kat87] K. Kato, *On p -adic vanishing cycles*, Advanced Study in Pure Math. **10** (1987), 207–251
- [Kat89] ———, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, Geometry and Number Theory , John Hopkins University Press (1989), 191–224
- [Kat94] ———, *Semi-stable reduction and p -adic étale cohomology*, Astérisque **223**, Soc. Math. France (1994), 269–293
- [Ser72] J.P. Serre, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques*, Invent. Math. **15** (1972), 259–331
- [Tsu99] T. Tsuji, *p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, Invent. Math. **137** (1999), 233–411
- [Tsu00] ———, *On p -adic nearby cycles of log smooth families*, Bull. Soc. Math. France **128** (2000), 529–575