Des formes bilinéaires en combinatoire

par

Pierre BORNSZTEIN[1]

Xavier CARUSO[2]

RÉSUMÉ. *Cet article fait suite à [1] paru dans un précédent numéro de la RMS. On reprend un exemple proposé dans ce dernier papier, et on en donne une nouvelle solution, accessible dès la terminale et même en réalité proposée par un élève de terminale.*

MOTS-CLÉS : *Combinatoire, parité, différence symétrique*

1 Introduction

L'objectif de cet article est de donner une démonstration élémentaire de l'énoncé suivant :

Énonce 1. *Soit E un ensemble de cardinal n. Soient $A_1, \dots, A_m$ des parties de E chacune de cardinal impair et telles que pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j$ soit de cardinal pair. Alors $m \leq n$.*

Dans [1], les auteurs ont donné une preuve conceptuelle (s'appuyant principalement sur de l'algèbre bilinéaire en caractéritique 2) de cet énoncé. Ils ont pu ensuite transformer cette preuve en une nouvelle démonstration élémentaire[3].

Par la suite, cet énoncé a été donné comme exercice pour l'entrainement de certains élèves de terminale à l'Olympiade Internationale de Mathématiques. Un de ces élèves, Raphaël Beuzart-Plessis[4] a donné une nouvelle solution élémentaire que nous avons jugé intéressant de reproduire ici.

[1]Professeur agrégé de mathématiques ; e-mail : `bornsztein@voila.fr`

[2]Élève de l'École Normale Supérieure de Paris ; e-mail : `xavier.caruso@normalesup.org`

[3]À ce propos, signalons qu'un légér détail a été « omis » dans cette preuve. Dans la démonstration du lemme 2, en reprenant les notations introduites alors, il faut en outre dire que quitte à renuméroter les A_i, on peut supposer que $1 \in J_1$. Cela permet, à la fin, de s'assurer de la non-vacuité de J puisque 1 élément de J_1 mais non élément de J_2 appartient à la différence symétrique $J = J_1 \Delta J_2$.

[4]Raphaël Beuzart-Plessis est premier prix de la session 2004 concours général de mathématiques et a également obtenu un accessit au concours général de physique. Il a en outre représenté deux fois la France à l'Olympiade Internationale de Mathématique, l'année dernière (donc en juillet 2003) au Japon et cette année (donc en juillet 2004) en Grèce. Il y a remporté deux fois une médaille de bronze.

2 Une solution élémentaire

La solution présentée dans ce paragraphe est entièrement due (à quelques reformulations près) à Raphaël Beuzart-Plessis.

On rappelle que si A et B sont deux parties d'un ensemble E, on définit la différence symétrique de A et de B par :

$$A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$$

Prouvons successivement plusieurs lemmes qui vont impliquer simplement le résultat :

Lemme 1. *Soient A et B deux parties d'un ensemble E, alors :*

$$\mathit{Card}\,(A\Delta B) \equiv \mathit{Card}\,A + \mathit{Card}\,B \pmod 2.$$

Démonstration. Comme $A \cap B \subset A \cup B$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Card}\,(A\Delta B) & = & \mathrm{Card}\,(A \cup B) - \mathrm{Card}\,(A \cap B) \\ & = & \mathrm{Card}\,A + \mathrm{Card}\,B - 2\mathrm{Card}\,(A \cap B) \end{array}$$

d'où le lemme. □

Lemme 2. *Soit E un ensemble à n éléments ($n \geq 1$). Soient $A_1, \ldots, A_k$ ($k \leq n-1$) k sous-ensembles de E, chacun de cardinal impair et tels que $A_i \cap A_j$ soit de cardinal pair pour tous $i \neq j$. Alors l'ensemble des parties de E de cardinal impair et dont l'intersection avec chacun des A_i est de cardinal pair, ne compte pas plus[5] de 2^{n-k-1} éléments.*

Démonstration. On démontre le lemme par récurrence sur k. Pour $k = 0$, il s'agit de dénombrer les parties de E de cardinal impair. Or, si $a \in E$, l'application $X \mapsto X\Delta\{a\}$ définit une bijection entre les parties de cardinal impair et celles de cardinal pair. Il y en a donc autant. Comme E admet 2^n parties, l'ensemble que l'on veut dénombrer a bien pour cardinal 2^{n-1}.

Supposons le résultat démontré pour un certain k (compris entre 0 et $n-2$) et prouvons-le pour $k+1$. Soit $A_1, \ldots, A_{k+1}$ des parties de E de cardinal impair et telles que $A_i \cap A_j$ soit de cardinal pair si $i \neq j$. Notons $\mathcal{E}_k$ (resp. $\mathcal{E}_{k+1}$) l'ensemble des parties de E de cardinal impair dont l'intersection avec chacun des A_i pour $1 \leq i \leq k$ (resp. pour $1 \leq i \leq k+1$) est un ensemble de cardinal pair.

Par hypothèse de récurrence, on a $\mathrm{Card}\,\mathcal{E}_k \leq 2^{n-k-1}$. D'autre part, on a évidemment $\mathcal{E}_{k+1} \subset \mathcal{E}_k$. Si $\mathcal{E}_{k+1}$ est vide, on a fini. Sinon, considérons $Y \in \mathcal{E}_{k+1}$ et l'application f suivante :

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{E}_k & \to & \mathcal{E}_k \\ & X & \mapsto & X\Delta A_{k+1}\Delta Y \end{array}$$

[5] En fait, il compte exactement 2^{n-k-1} éléments, mais on n'en aura pas besoin ici.

Le premier lemme et la formule :

$$(X \Delta Y \Delta Z) \cap A = (X \cap A) \Delta (Y \cap A) \Delta (Z \cap A)$$

prouvent que f va bien de $\mathcal{E}_k$ dans $\mathcal{E}_k$ et qu'en outre, si $X \in \mathcal{E}_{k+1}$, alors $f(X) \notin \mathcal{E}_{k+1}$. De plus, $f \circ f = \mathrm{id}$ et donc f est bijective. On en déduit que :

$$\operatorname{Card} \mathcal{E}_{k+1} \leq \frac{1}{2} \operatorname{Card} \mathcal{E}_k \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{n-k-1} = 2^{n-(k-1)-1}$$

ce qui conclut la récurrence. $\square$

On termine alors l'exercice de façon simple. Supposons par l'absurde qu'il existe $A_1, \ldots, A_m$ $(m \geq n+1)$ des sous-ensembles de E chacun de cardinal impair et tels que $A_i \cap A_j$ soit de cardinal pair pour $i \neq j$. On applique le lemme précédent pour $k = n-1$ et pour les ensembles $A_1, \ldots, A_k$: il ne peut exister plus d'un ensemble de cardinal impair dont l'intersection avec chacun des A_i $(1 \leq i \leq n-1)$ est un ensemble de cardinal pair. Mais cela est absurde puisque l'on a au moins A_n et A_{n+1}.

3 Quelques remarques

Notons en premier lieu que la notion de différence symétrique joue un rôle central dans la preuve précédente. Il est en fait naturel que cette notion apparaisse de façon centrale, car elle correspond dans la version « algèbre linéaire » à la somme de deux vecteurs, comme cela est expliqué dans [1].

L'énoncé du lemme 2, qui est le lemme clé de cette dernière solution, correspond, du côté de l'algèbre linéaire, à un énoncé stipulant que, dans un espace de dimension n, l'espace orthogonal (pour une forme bilinéaire non dégénérée) à k vecteurs linéairement indépendants, est de dimension (inférieure ou) égale à $n-k$.

Références

[1] P. Bornsztein, X. Caruso, *Des formes bilinéaires en combinatoire*, RMS, **114 no3**, 2003/2004, pp