Clap Clap : Formes modulaires, aspects théoriques et calculatoires
Jeudi 9 février 2017, Rennes, 11h
Stéphane Bijakowski

Formes modulaires p-adiques I

I Formes modulaires classiques

$SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathcal{H}$ demi-plan Poincaré

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Déf : $k \in \mathbb{Z}$. Une forme modulaire de poids k est une fct holomorphe

$$f : \mathcal{H} \to \mathbb{C} \text{ tq } f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z\right) = (cz+d)^k f(z)$$

Act° de $-I_2$: $f(z) = (-1)^k f(z) \Rightarrow k$ pair

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $f(z+1) = f(z) \rightsquigarrow 1$ périodique

q-développement

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \qquad q = e^{2i\pi z}$$

(holomorphe, y compris à l'∞ $\Rightarrow n \geq 0$)

Not° : $M_k(\mathbb{C})$ = espace des formes modulaires de poids k.

Déf : $R \subseteq \mathbb{C}$ s/s anneau ; $M_k(R) = \{ f \in M_k(\mathbb{C}) \mid a_n(f) \in R \ \forall n \geq 0 \}$

Séries d'Eisenstein : $k \geq 4$ pair

$$G_k = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

$$E_k = -\frac{2k}{B_k} G_k = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

B_k nb de Bernoulli $\in \mathbb{Q}$

$$G_k, E_k \in M_k(\mathbb{Q})$$

$$\sigma_s(n) = \sum_{d \mid n} d^s$$

$M(\mathbb{C}) := \bigoplus_k M_k(\mathbb{C})$ algèbre (graduée) des formes modulaires

engendrée par E_4 et E_6 (base entière)

II Formes modulaires p-adiques (à la Serre) ie via q-développements.

$p \geq 5$ (+ simple) premier

On veut étudier $\mathbb{Q}_p[[q]]$.

On définit $v_p(f) = \inf_{n \in \mathbb{N}} v_p(a_n)$

On dit que $f \equiv g \mod p^m$ si $v_p(f-g) \geq m$.

Ex: k, k' pairs, $k \equiv k' \mod p-1$,

$G_k = G_{k'} \mod p$ si $k \not\equiv 0 \mod p-1$

$E_k = 1 \mod p$ si $k \equiv 0 \mod p-1$

$$\bigoplus_k M_k(\overset{\left\{\frac{a}{b} / b \wedge p = 1\right\}}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}_{(p)}}}) \xrightarrow[\text{mod } p]{\text{réd.}} \mathbb{F}_p[[q]]$$

Déf (Serre): L'image $\overline{M}$ de cette appl° est l'alg. des formes modulaires mod p.

Dans $\overline{M}$: $E_{p-1} = 1$

Prop: $\overline{M} \simeq \mathbb{F}_p[E_4, E_6] / (E_{p-1} - 1)$ Le poids n'est plus défini que modulo $p-1$

$\overline{M}$ est graduée par $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$

Déf (Serre): Une forme modulaire p-adique est un él^t f de $\mathbb{Q}_p[[q]]$ tq

$\exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M(\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ (f_n de poids k_n) et $v_p(f - f_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

Lemme: Soit $f \in M_k(\mathbb{Z}_{(p)})$, $g \in M_{k'}(\mathbb{Z}_{(p)})$

Si $\begin{cases} f = g \mod p^m \\ f \not\equiv 0 \mod p \end{cases}$ alors $k = k' \mod (p-1)p^{m-1}$

Corollaire: Soit f f.m. p-adique, $f = \lim f_n$, $f_n \in M_{k_n}(\mathbb{Z}_{(p)})$

la suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans $\varprojlim_m \mathbb{Z}/(p-1)p^m\mathbb{Z}$

$k \in \varprojlim \mathbb{Z}/(p-1)p^m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ est indép. de $(f_n)_n$

Rappel: k pair, $k \geq 4$, $G_k := \frac{-B_k}{2k} + \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$

Soit $k \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$, pair modulo $p-1$

$\exists (k_n) \in (2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, $k_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathbb{N}} \infty$ $k_n \xrightarrow[n \to \infty]{} k$ ds $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$

Prop: $G_{k_n} \longrightarrow G_k \in \mathbb{Q}_p[[q]]$. (indépendant du choix de $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$)

$\sigma_{k_n - 1}(n) = \sum_{d | n} d^{k_n - 1}$

Question: $d^{k_n - 1}$ converge-t-il ds $\mathbb{Q}_p$?

(a) $p | d \rightsquigarrow d^{k_n - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

(b) $p \nmid d$ $d^{k_n - 1} = d^{k_m - 1} d^{k_n - k_m}$

$k_n - k_m$ divisible par $(p-1)p^k \Rightarrow d^{k_n - k_m} \equiv 1 \mod p^{k+1}$

III Courbes modulaires

$N \geq 5$ fixé $p \wedge N = 1$

Déf: Soit X la courbe modulaire de niveau N:
espace de modules des c. ell. E + str. de niveau

$X/\mathbb{Z}_p$ schéma, $E \longrightarrow X$ c. ell. universelle
$e : X \longrightarrow E$ section unité

$\omega_E = e^* \Omega^1_{E/X}$ faisceau inversible

Déf: Soit R une $\mathbb{Z}_p$ algèbre, une forme modulaire classique est un élément de
$$H^0(X \times_{\mathbb{Z}_p} R, \omega_E^k)$$

$T = \mathrm{Isom}(\mathcal{O}_X, \omega_E)$ trivialisation

$$\begin{array}{c} T \ \circlearrowleft \mathbb{G}_m \\ \downarrow \pi \\ X \end{array}$$

action de $\mathbb{G}_m$: $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, $x \mapsto x^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$

$$\omega_E^k = \pi_* \mathcal{O}_T[-k]$$

f forme modulaire classique (dans $\mathbb{Z}_p$) : loi fonctorielle (Katz).

$$(E, R, \phi : \omega_E \simeq R) \to f(E,\phi) \in R$$
$$f(E, \lambda\phi) = \lambda^{-k} f(E,\phi) \quad \forall \lambda \in R^\times$$

R $\mathbb{Z}_p$-alg
E/R c. ell.

IV Courbes elliptiques ordinaires

Déf - Prop: $E/\bar{\mathbb{F}}_p$ c. ell.
→ schéma en gpe fini et plat de rg p^2 sur $\bar{\mathbb{F}}$

(1) Soit $\# E[p](\bar{\mathbb{F}}_p) = p$ On dit que E est ordinaire

(2) Soit $\# E[p](\bar{\mathbb{F}}_p) = 1$ ——— supersingulière   ext° de α_p par α_p

→ $\hat{E}$ schéma en gpe fini et plat

Prop: $E/\bar{\mathbb{F}}_p$ est ordinaire $\Leftrightarrow E[p] \simeq \mu_p \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow E[p^\infty] \simeq \mu_{p^\infty} \times \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.   sur $\bar{\mathbb{F}}$

Frobenius $F : E \to E^{(p)}$

Verschiebung $V : E^{(p)} \to E$

$V : \omega_E \to \omega_{E^{(p)}} \simeq \omega_E^{p} = \underbrace{\omega_E \otimes \dots \otimes \omega_E}_{p \text{ fois}}$

Prop: V induit une section (invariant de Hasse) $ha \in H^0(\bar{\mathbb{F}}_p, \omega_E^{p-1})$
$ha \neq 0 \Leftrightarrow E$ est ordinaire

Soit $X_1 = X \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$

$V : E^{(p)} \to E$

On peut définir $ha \in H^0(X_1, \omega_E^{p-1})$

C'est une forme modulaire modulo p, de poids $p-1$.

Prop: ha se relève en $Ha \in H^0(X, \omega_E^{p-1})$.
q-dvt à l'∞ = 1 (courbe de Tate)

D/ $Ha = E_{p-1}$ □   rq. $E_{p-1} \equiv 1$ mod p, mais 1 pas de poids $p-1$.

Mod p : $\left.\begin{array}{l} \text{même poids} \\ + \text{même } q\text{-dév} \end{array}\right\} \Rightarrow$ même forme

V Tour d'Igusa

X_1 courbe modulaire modulo p
$\uparrow$
S_1 lieu ordinaire := lieu où ha inversible
ouvert dense ⚠ Pr certaines var. Shimura, ce lieu ordinaire est $\emptyset$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$, on définit $X_m = X \times_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ lisse / $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$
$\uparrow$
S_m lieu où E_{p-1} est inversible.

X lisse sur $\mathbb{Z}_p$.
$\uparrow$
S lieu où E_{p-1} est inversible.

S_∞ := complétion formelle de S le long de S_1

Ex: Si $Y = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}_p[X]$
$Y_1 = \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_p[X]$
Y_∞ = complét° formelle de Y le long de Y_1
$= \mathrm{Spf}\, \mathbb{Z}_p\langle X \rangle$
$= \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n X^n \,/\, a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \right\}$ séries formelles convergeant sur boule unité

$(n,m)\in \mathbb{N}^{*2}$

$$T_{m,n} = \mathrm{Isom}\left(\mu_{p^n}, E[p^n]^\circ\right)$$

partie connexe, multiplicative car lieu ordinaire

torseur sous $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$

$\downarrow \pi_m$

$T_{m,\infty} = \varprojlim_n T_{m,n}$

$T_{\infty,n} = \varinjlim_m T_{m,n}$

$T_\infty = \varinjlim_m T_{m,\infty}$

$$\begin{array}{ccccc}
T_{1,\infty} & \longrightarrow & T_{m,\infty} & \longrightarrow & T_\infty \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
T_{1,n} & \longrightarrow & T_{m,n} & \longrightarrow & T_{\infty,n} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S_1 & \longrightarrow & S_m & \longrightarrow & S_\infty
\end{array}$$

$T_{m,\infty} \to T_m$ torseur sous $\mathbb{Z}_p^\times$

$T_\infty \to S_\infty$ torseur sous $\mathbb{Z}_p^\times$

$V_{m,n} = H^0(T_{m,n}, \mathcal{O}_{T_{m,n}})$

$V_m = H^0(T_{m,\infty}, \mathcal{O}_{T_{m,\infty}})$

$V_\infty = \varinjlim_m V_m \circlearrowleft \mathbb{Z}_p^\times$

Déf: • V_∞ : anneau des formes modulaires modulaires

• $\kappa : \mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$ caractère continu

$V_\infty[\kappa^{-1}] = \{ v \in V_\infty \,/\, \lambda . v = \kappa^{-1}(\lambda) . v \}$ formes modulaires p-adiques de poids κ.

$\mathrm{Hom}_{cont.}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{Z}_p^\times) = ?$

Rapport entre les 2 déf du poids..

$\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{F}_p^\times \times (1+p\mathbb{Z}_p)$

$\simeq \mathbb{F}_p^\times \times (p\mathbb{Z}_p)$ logarithme p-adiq.

$\simeq (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}_p$.

$$\mathrm{Hom}_{cts}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{Z}_p^\times) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \underbrace{\mathrm{Hom}_{cts}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p^\times)}$$

$f \mapsto f(1)$ $\quad$ $1+p\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p$

Ccl: $\mathrm{Hom}_{cts}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{Z}_p^\times) \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$ (poids p-adiq.)

Inclusion $\mathbb{Z}$ (poids classiques) $\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{cts}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{Z}_p^\times)$

$k \longmapsto (x \mapsto x^k)$

Forme modulaire p-adique F :

la fonctorielle $(E/R, \psi : \mu_{p^\infty} \simeq E[p^\infty]^\circ) \longrightarrow F(E,\psi)$

R $\mathbb{Z}_p$-alg p-adiq^t complète (ie $R = \varprojlim R/p^nR$)

E/R c.ell.

avec $F(E, \lambda\psi) = \kappa^{-1}(\lambda) F(E,\psi)$ $\forall \lambda \in \mathbb{Z}_p^\times$

On définit : $\Omega^\kappa = \pi_* \mathcal{O}_{T_\infty}[\kappa^{-1}]$ "Formes p-adiques à la Katz"

Lien avec les formes classiques

Soit f une forme classique de poids k.

On veut lui associer une forme p-adique.

Soit R $\mathbb{Z}_p$-alg. p-adiq^t complète, E/R c.ell ordinaire, $\psi : \mu_{p^\infty} \simeq E[p^\infty]^\circ$

$d\psi : \omega_{E[p^\infty]^\circ} \simeq \omega_{\mu_{p^\infty}}$

$\omega_{E[p]} = \omega_{E/p}$ + R p-adiq complet

$\omega_{E[p^\infty]^\circ} \simeq \omega_E$ $\quad$ $\omega_{\mu_{p^\infty}} \simeq R$

$F(E,\psi) := f(E, d\psi)$

D'où {formes modulaires de poids k} $\hookrightarrow$ {formes p-adiques de poids k}

Clap-Clap : Formes modulaires, aspects théoriques et calculatoires
Vendredi 10 février 2017, 9h, Paris
Stéphane Bijakowski

Formes modulaires p-adiques II

$X/\mathbb{Z}_p$ courbe modulaire

ω_E^k $(k \in \mathbb{Z})$ $\rightsquigarrow$ formes modulaires classiques

$S \hookrightarrow X$ lieu où E_{p-1} est inversible (lieu ordinaire)

S_∞ : complétion formelle le long de la fibre spéciale

$\mathcal{X}$ ——— de X ———.

$S_\infty \hookrightarrow \mathcal{X}$ lieu ordinaire

Ω^k sur S_∞, $k \in \mathcal{W} = \mathrm{Hom}_{cts}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{Z}_p^\times)$, $\mathcal{W} \supset \mathbb{Z}$

Fibre générique (au sens de Raynaud) de S_∞, $\mathcal{X}$: espace rigide

I Géométrie rigide

$$\mathbb{Q}_p\langle T_1, \dots, T_n\rangle := \left\{ \sum_{(k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{N}^n} a_{k_1,\dots,k_n} T_1^{k_1} \cdots T_n^{k_n} \;/\; a_{k_1 \dots k_n} \xrightarrow[k_1+\dots+k_n \to \infty]{} 0 \right\}$$

analogue fcts holomorphes $/\mathbb{C}$ — ie CV sur boule unité

Une algèbre de Tate est une algèbre de la forme $\mathbb{Q}_p\langle T_1, \dots, T_n\rangle / \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ idéal.

toutes les normes de Banach sur le quotient sont équivalentes — automatiquement fermé, de type fini

Un espace affinoïde est un espace de la forme $Y = \mathrm{Spm}\, A$, A alg. de Tate

Prop: Soit A alg. de Tate, $\mathfrak{m}$ idéal max, alors $A/\mathfrak{m}$ est une ext° finie de $\mathbb{Q}_p$

Csq: $|\ |_p$ s'étend naturellement à $A/\mathfrak{m}$

pr $y \in Y$, on définit $K(y)$ corps résiduel.

Morphisme $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K(y) \\ f & \longmapsto & f(y) \end{array}$ On peut définir $|f(y)|$ pr $f \in A$, $y \in Y$

Soient $f_1, \dots, f_r, g$ ds A engendrant A ($\hat{c}$ idéal)

Déf: $U\left(\frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_r}{g}\right) = \left\{ y \in Y \;/\; \forall i \in [\![1, r]\!] \;\; |f_i(y)| \leq |g(y)| \right\}$ ★

$\mathcal{O}_Y(U) = A\left\langle \frac{f_1}{g}, \dots, \frac{f_r}{g} \right\rangle = A\langle T_1, \dots, T_r\rangle / (gT_i - f_i)$

On peut définir sur Y une topologie de Grothendieck :
- ouverts admissibles (union finie de ★)
- recouvrements admissibles

⚠ Union de 2 ouverts pas tjs ouverte.

Version Berkovich / Huber } vraies topologies, mais espaces + gros, plsrs types de pts, théorie des val°.

$(Y, \mathcal{O}_Y)$ espace affinoïde, $\mathcal{O}_Y$ faisceau.

Déf: Un espace rigide est un $(\tilde{Y}, \mathcal{O}_{\tilde{Y}})$ + topo de Grothendieck, $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$ faisceau, localement affinoïde

II Voisinages stricts du lieu ordinaire

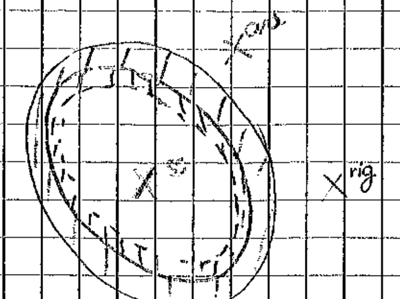
$$\begin{array}{ccccc} X & \rightsquigarrow & \mathcal{X} & \rightsquigarrow & X^{rig} \\ \text{"}\mathbb{Z}_p[X]\text{"} & & \text{"}\mathbb{Z}_p\langle X\rangle\text{"} & & \text{"}\mathbb{Q}_p\langle X\rangle\text{"} \end{array}$$

Pour $x \in X^{rig}(K)$, $K/\mathbb{Q}_p$ fini

$\Updownarrow$

$E \longrightarrow \mathcal{O}_L$ c.ell.

$$X^{ord} = \left\{ x \in X^{rig} \;/\; |\underbrace{E_{p-1}(x)}_{\neq 0 \text{ si } |\ |=1}| = 1 \right\} \text{ ouvert admissible de } X^{rig}.$$



Voisinage strict du lieu ordinaire

Pr $\varepsilon>0$ $X^{ord}(\varepsilon) = \{x \in X^{rig} / |E_{p-1}(x)| \geq p^{-\varepsilon}\}$

Pr $K/\mathbb{Q}_p$ ext° finie ;

- $E \to \mathcal{O}_K$ correspondant à $x \in X^{rig}$

$\omega := v(E_{p-1}(x))$ invariant de Hodge

E ordinaire $\Leftrightarrow$ $\omega = 0$ ds ce cas, $\exists!\, H$ s/s gpe $\subseteq E[p]$ de type multiplicatif.
(i.e. de $\deg p$)

$x \in X^{ord}(\varepsilon) \Leftrightarrow \omega \leq \varepsilon$

Déf: $H \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ schéma en gpes fini et plat de $\deg p$.

$\omega_H \simeq \mathcal{O}_K/(a)$ a élt de $\mathcal{O}_K$

$\deg H := v(a)$ degré de H.

Si H étale $\deg = 0$ $\omega_H = 0$
Si H mult $\deg = 1$
En général, $\in [0,1]$

Thm (Lubin - Katz): preuve plein de gens (Fargues...)

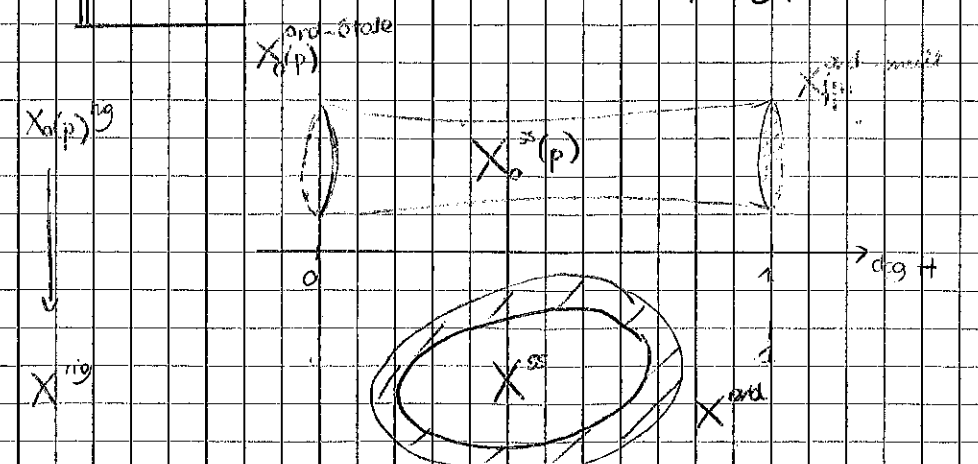
Soit $E \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$, $\omega = v(E_{p-1}(x))$. relève noyau du Frob

Si $\omega \leq \frac{p}{p-1}$, alors $\exists!\, H \subseteq E[p]$ s/s gpe de $\deg p$ ("s/s gpe can"),
de $\deg H = 1 - \omega$

$\omega = 0 \Rightarrow E$ ordinaire $\Rightarrow \deg H = 1$

Déf: $X_0(p)$ c. modulaire de niveau Iwahorique (schéma $/\mathbb{Z}_p$).

Espace de modules de (E, H) E c. ell.
$H \subseteq E[p]$ rg p.



Section $X^{ord} \xrightarrow{\sim} X_0(p)^{ord-mult}$
$E \longmapsto (E, H_{can})$

$X_0(p)^{ord-mult}(\varepsilon) = \{x \in X_0(p)^{rig} / \deg H(x) \geq 1 - x\}$ voisinage strict

S/s gpe canonique s'étend $X^{ord}(\varepsilon) \longrightarrow X_0(p)^{ord-mult}(\varepsilon)$

Csq: on ne peut pas vraiment parler de niveau en p pr formes modulaires p-adiq.

III Formes modulaires surconvergentes

X^{rig} ω^k $k \in \mathbb{Z}$
$\cup$
$X^{ord}(\varepsilon)$ $\varepsilon > 0$
$\cup$
X^{ord} Ω^k, $k \in \mathcal{W}$

Déf: Soit $k \in \mathbb{Z}$. Une forme surconvergente de poids k est un élt de
$H^0(X^{ord}(\varepsilon), \omega^k)$ pr un certain $\varepsilon > 0$

L'espace des formes surconvergentes de poids $k \in \mathbb{Z}$: $M_k^{\dagger} = \varinjlim_{\varepsilon} H^0(X^{ord}(\varepsilon), \omega^k)$

Rappel: E_k série d'Eisenstein p-adique.

Déf: Soit $k \in \mathcal{W}$, f forme p-adique de poids k.
On dit que f est surconvergente si $\frac{f}{E_k}$ est surconvergente.
$\curvearrowleft$ poids 0.

Rq: pr $k \in \mathbb{Z}$, déf $\Leftrightarrow$ à celle ci-dessus.

Thm (Pilloni, Andreatta - Iovita - Stevens):

$\forall k \in \mathcal{W}$, $\exists\, \Omega^k$ faisceau sur $X^{ord}(\varepsilon)$ pr un certain $\varepsilon > 0$ possiblement dépendant de k
+ compatible avec Ω^k déjà construit sur X^{ord}
+ on retrouve déf. avec série d'Eisenstein.

Ingrédients: • s/s gpe canonique $H_n \subset E[p^n]$
$E \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ c. ell., $\omega \leq \varepsilon$

• application de Hodge - Tate

$HT : H_n^{D}(\bar{K}) \longrightarrow \omega_{H_n}$ (D : dual)
$f : H_n \to \mathbb{G}_m \longmapsto df\left(\frac{dt}{t}\right)$

$H_n^D = \mathrm{Hom}(H_n, \mathbb{G}_m)$
$df : \omega_{\mathbb{G}_m} \to \omega_{H_n}$

$\omega_E \otimes \mathcal{O}_K / p^{1-\varepsilon}\mathcal{O}_K \simeq \omega_{H_n} \otimes \mathcal{O}_K / p^{1-\varepsilon}\mathcal{O}_K$

Construire $\mathcal{F}^p \subseteq \omega_E$ s/s faisceau adapté à l'appl° de HT : $H_n^D(\bar{K}) \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$

IV Opérateurs de Hecke

. Pr $\ell \nmid Np$, on définit T_ℓ par :

f forme modulaire classique (à fonctionnelle) $(E, \phi : \omega_E \simeq R)$

$$\frac{1}{\ell} \sum_{\substack{L \subseteq E[\ell] \\ \mathrm{rg}\ \ell}} f(E/L, \phi') = T_\ell(f)(E,\phi)$$

T_ℓ agit sur les formes classiques, p-adiques, surconvergentes.

. Opérateur U_p : agit sur les formes classiques de niveau $\Gamma_0(p)$
formes p-adiques, surconvergentes.

f classique pr $\Gamma_0(p)$. $(E,H,\phi) \longrightarrow f(E,H,\phi)$

$$(U_pf)(E,H,\phi) = \frac{1}{p} \sum_{\substack{L \subseteq E[p] \\ \mathrm{rg}\ p,\ L \neq H}} f(E/L, \underset{\overset{\shortparallel}{H+L/L}}{E[p]/L}, \phi')$$

facteur de normalisation pr maximaliser intégralité.

U_p agit aussi sur les pts : $x \in X_0(p)^{\mathrm{rig}} \rightsquigarrow \{ (E/L, E[p]/L) \}$ ens^{ble} de pts
$\Updownarrow$
(E,H)

$S \subseteq X_0(p) \rightsquigarrow U_p(S)$
s/s ens^{ble}

Prop : U_p stabilise le lieu ordinaire et ses voisinages stricts

V Opérateurs compacts

A $\mathbb{Q}_p$-alg de Banach, commutative, noethérienne, $|.| : A \to \mathbb{R}$.

M A-module de Banach

Déf : M est orthonormalisable (ON) s'il existe I ens^{ble}, $(e_i)_{i\in I} \in A^I$

(a) $\forall m \in M$, m s'écrit de manière unique $m = \sum_{i \in I} a_i e_i$
avec $a_i \to 0$ topo. complémentaire des ens^{bles} finis

(b) $|m| = \sup_{i \in I} |a_i|$

M est potentiellement ON (pON) si (b) est remplacé par

(b') $c_1 \sup_{i\in I} |a_i| \leq |m| \leq c_2 \sup_{i \in I} |a_i|$

Déf : Soit M un A-module de Banach. On dit que
M satisfait (Pr) si M est facteur direct d'un module pON.

Déf : Soient M, N deux A-modules de Banach ON.
$\mathrm{Hom}_{cts}(M,N)$ peut être muni d'une norme.

Déf : On définit $\mathcal{C}(M,N)$ (opérateurs compacts) = l'adhérence des morphismes de rg fini. (ie image de rg fini).
On dit aussi "complètement continu"

Pour M ON, $\phi : M \to M$ cpct.

On peut définir $P(X) = \det(Id - X\phi) \in A[[X]]$ "polyn. car."

bien défini, $= \sum_{n \geq 0} c_n X^n$

Pr $(e_i)_{i \in I}$ base de M $\phi(e_i) = \sum_{j \in I} \phi_{j,i} e_j$

$c_0 = 1$, $c_1 = \sum_i \phi_{i,1}$, $c_2 = \ldots$

VI Variétés de Hecke

$\mathcal{W} = \mathrm{Hom}_{cts}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{Z}_p^\times)$.

Déf : L'espace des poids $\mathcal{W}$ est l'espace rigide tel que
$\mathcal{W}(\mathbb{C}_p) = \mathrm{Hom}_{cts}(\mathbb{Z}_p^\times, \mathbb{C}_p^\times)$

$\mathbb{Z}_p^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p$.

$\mathcal{W} =$ $p-1$ copies de boule ouverte.

non affinoïde mais recouverte par affinoïdes

Soit $\underbrace{\mathrm{Spm}\,A}_{=\mathcal{W}_0} \longrightarrow \mathcal{W}$ affinoïde.

Pilloni, Andreatta-Iovita-Stevens : $\exists$ faisceau Ω sur $X^{ord}(\varepsilon) \times \mathrm{Spm}\,A$ /

$$\Omega|_{X^{ord}(\varepsilon)\times\{k\}} = \Omega^k$$

$$M = H^0(X^{ord}(\varepsilon) \times \mathcal{W}_0, \Omega)$$

$\mathbb{T}$ algèbre de Hecke hors p

U_p est compact $\quad U_p : X_0^{ord\text{-}mult}(p)(\varepsilon) \xrightarrow{\text{extract}^\circ} X_0^{ord\text{-}mult}(p)(\varepsilon)$

$$\begin{tikzcd} X_0^{ord\text{-}mult}(p)(\varepsilon) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & X_0^{ord\text{-}mult}(p)(\varepsilon) \\ & X^{ord\text{-}mult}\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

Prop. M satisfait (Pr).

$\rightsquigarrow$ Buzzard Machinery

$P(X) = \det(\mathrm{Id} - XU_p)$

$\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{W}_0 \times (\mathbb{A}^1)^{rig}$ lieu des zéros de P (valeurs propres...)

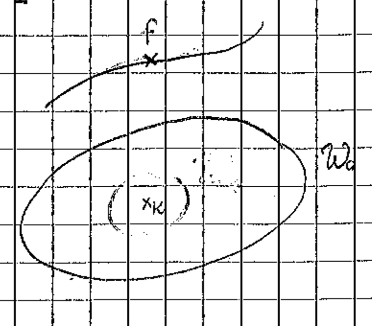
$\mathbb{T} \longrightarrow \mathrm{End}(M) \quad$ image permet de construire $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Z}$.

pts de $\mathcal{Z} \longleftrightarrow$ valeurs propres de P

pts de $\mathcal{E} \longleftrightarrow$ syst. de valeurs propres de $\mathbb{T}$ agissant sur les formes surCV.

Prop : Soit f forme surCV propre de poids k.
Alors $\exists \mathcal{W}_1 : \mathrm{Spm}\,B \hookrightarrow \mathcal{W}_0$ et $F \in H^0(X^{ord}(\varepsilon) \times \mathcal{W}_1, \Omega)$
famille de formes propres tq
$\forall k_1 \in \mathcal{W}_1 \quad F|_{k_1}$ est surCV et propre de poids k_1

$F|_k = f \quad (k \in \mathcal{W}_1)$



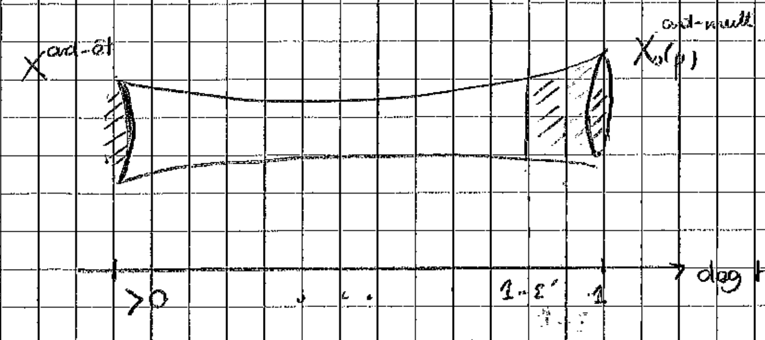
VI Classicité

Thm (Coleman, Buzzard-Kassaei)

Soit f surconvergente, poids $k \in \mathbb{Z}$, $U_p f = a_p f$.

Si $v(a_p) + 1 < k$, alors f est classique de niveau $\Gamma_0(p)$.

Méthode de Buzzard et Kassaei : prolongement analytique.



$f = a_p^{-1} U_p f$

Sur $X^{ord\text{-}ét}$: construire $(f_n)_{n\geq 1}$, CV sur $k > 1 + v(a_p)$.

Généralisations possibilité : variétés de Hilbert, de Siegel (Brasca, Rosso)
var. de Shimura, avec [illegible] si lieu ordinaire.
(Valentin Hernandez).